

>
=

SOLUCION

>
=

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEMESTRE 2013-1
PRIMER EXAMEN PARCIAL

2012-10-01

>
=

DADO EL PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES Y LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE TERCER ORDEN DE COEFICIENTES CONSTANTES - NO HOMOGÉNEA

$$\frac{d^3}{dt^3} x(t) - \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) - 14 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 24 x(t) = 14 e^{3t}$$

$$x(0) = 9$$

$$D(x)(0) = 12$$

$$D^{(2)}(x)(0) = 92 \quad (1)$$

1) (20/100 puntos) OBTENER SU SOLUCIÓN GENERAL UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE EL MÉTODO DE PARÁMETROS VARIABLES (sin utilizar dsolve)

> restart

RESPUESTA 1)

> Ecuacion := $\frac{d^3}{dt^3} x(t) - \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) - 14 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 24 x(t) = 14 e^{3t}$

$$Ecuacion := \frac{d^3}{dt^3} x(t) - \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) - 14 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 24 x(t) = 14 e^{3t} \quad (2)$$

> Condiciones := $x(0) = 9, D(x)(0) = 12, D^{(2)}(x)(0) = 92;$

$$Condiciones := x(0) = 9, D(x)(0) = 12, D^{(2)}(x)(0) = 92 \quad (3)$$

> EcuacionHom := lhs(Ecuacion) = 0

$$EcuacionHom := \frac{d^3}{dt^3} x(t) - \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) - 14 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 24 x(t) = 0 \quad (4)$$

> Q := rhs(Ecuacion)

$$Q := 14 e^{3t} \quad (5)$$

> EcuaCarac := $m \cdot 3 - m \cdot 2 - 14 m + 24 = 0$

$$EcuaCarac := m^3 - m^2 - 14 m + 24 = 0 \quad (6)$$

> Raiz := solve(EcuaCarac)

$$Raiz := -4, 2, 3 \quad (7)$$

> Sol₁ := $x(t) = \exp(Raiz_1 \cdot t); Sol_2 := x(t) = \exp(Raiz_2 \cdot t); Sol_3 := x(t) = \exp(Raiz_3 \cdot t)$

$$Sol_1 := x(t) = e^{-4t}$$

$$Sol_2 := x(t) = e^{2t}$$

$$Sol_3 := x(t) = e^{3t} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} > \text{SolHom} := x(t) = C_1 \cdot \text{rhs}(\text{Sol}_1) + C_2 \cdot \text{rhs}(\text{Sol}_2) + C_3 \cdot \text{rhs}(\text{Sol}_3) \\ & \text{SolHom} := x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} > \text{SolNoHom} := x(t) = A \cdot \text{rhs}(\text{Sol}_1) + B \cdot \text{rhs}(\text{Sol}_2) + E \cdot \text{rhs}(\text{Sol}_3) \\ & \text{SolNoHom} := x(t) = A e^{-4t} + B e^{2t} + E e^{3t} \end{aligned} \quad (10)$$

> with(linalg) :

$$\begin{aligned} > \text{WW} := \text{wronskian}([\text{rhs}(\text{Sol}_1), \text{rhs}(\text{Sol}_2), \text{rhs}(\text{Sol}_3)], t) \\ & \text{WW} := \begin{bmatrix} e^{-4t} & e^{2t} & e^{3t} \\ -4 e^{-4t} & 2 e^{2t} & 3 e^{3t} \\ 16 e^{-4t} & 4 e^{2t} & 9 e^{3t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} > \text{BB} := \text{array}([0, 0, Q]) \\ & \text{BB} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 14 e^{3t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} > \text{SOL} := \text{simplify}(\text{linsolve}(\text{WW}, \text{BB})) : \text{Aprima} := \text{SOL}_1; \text{Bprima} := \text{SOL}_2; \text{Eprima} := \text{SOL}_3; \\ & \text{Aprima} := \frac{1}{3} e^{7t} \\ & \text{Bprima} := -\frac{7}{3} e^t \\ & \text{Eprima} := 2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} > A := \text{int}(\text{Aprima}, t) + C_1; B := \text{int}(\text{Bprima}, t) + C_2; E := \text{int}(\text{Eprima}, t) + C_3; \\ & A := \frac{1}{21} e^{7t} + C_1 \\ & B := -\frac{7}{3} e^t + C_2 \\ & E := 2t + C_3 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} > \text{simplify}(\text{SolNoHom}) \\ & x(t) = -\frac{16}{7} e^{3t} + C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t} + 2 e^{3t} t + C_3 e^{3t} \end{aligned} \quad (15)$$

>

FIN RESPUESTA 1)

>

2) (20/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DADAS LAS CONDICIONES INICIALES (sin utilizar dsolve)

> Condiciones

$$x(0) = 9, D(x)(0) = 12, D^{(2)}(x)(0) = 92 \quad (16)$$

> Sistema := eval(subs(t=0, rhs(SolNoHom) = rhs(Condiciones₁))), eval(subs(t=0, rhs(diff(SolNoHom, t)) = rhs(Condiciones₂))), eval(subs(t=0, rhs(diff(SolNoHom, t \$2)) = rhs(Condiciones₃))) : Sistema₁; Sistema₂; Sistema₃;

$$-\frac{16}{7} + C_1 + C_2 + C_3 = 9$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{34}{7} - 4C_1 + 2C_2 + 3C_3 &= 12 \\
 -\frac{60}{7} + 16C_1 + 4C_2 + 9C_3 &= 92
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

> Parametro := solve({Sistema}, {C1, C2, C3})

$$\text{Parametro} := \left\{ C_1 = 2, C_2 = 3, C_3 = \frac{44}{7} \right\}
 \tag{18}$$

> SolPart := simplify(subs(C1 = rhs(Parametro1), C2 = rhs(Parametro2), C3 = rhs(Parametro3), SolNoHom))

$$\text{SolPart} := x(t) = 4e^{3t} + 2e^{-4t} + 3e^{2t} + 2e^{3t}t
 \tag{19}$$

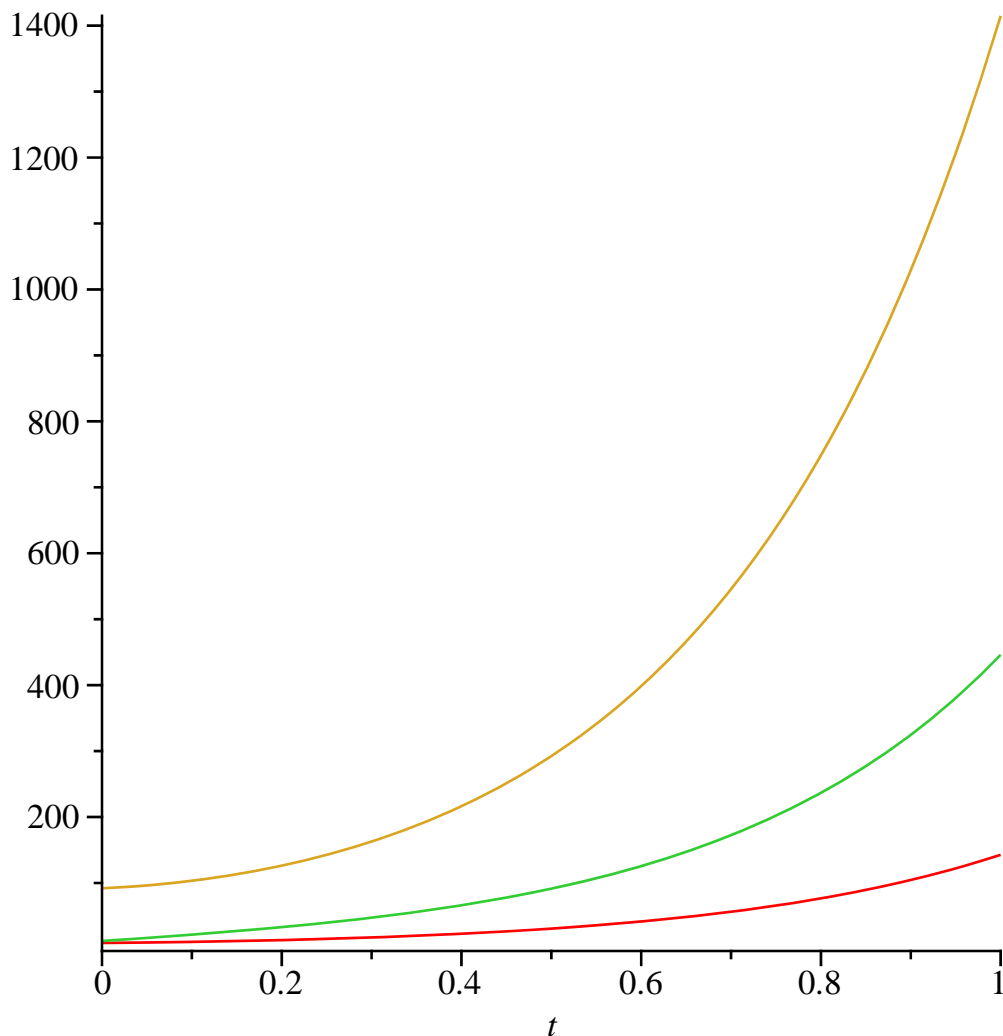
>

FIN RESPUESTA 2)

>

3) (10/100 puntos) GRAFICAR JUNTAS LA SOLUCIÓN PARTICULAR OBTENIDA, SU PRIMERA DERIVADA Y SU SEGUNDA, PARA UN INTERVALO DE $0 < t < 1$

> plot([rhs(SolPart), rhs(diff(SolPart, t)), rhs(diff(SolPart, t\$2))], t=0..1)



>

FIN RESPUESTA 3)

>

4) (20/100 puntos) CONVERTIR LA ECUACIÓN EN UN SISTEMA EQUIVALENTE DE TRES ECUACIONES DIFERENCIALES CON TRES INCÓGNITAS INCLUIDAS SUS CONDICIONES INICIALES.

> Ecuacion;

$$\frac{d^3}{dt^3} x(t) - \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) - 14 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 24 x(t) = 14 e^{3t} \quad (20)$$

> Condiciones;

$$x(0) = 9, D(x)(0) = 12, D^{(2)}(x)(0) = 92 \quad (21)$$

> SISTEMA := diff(x₁(t), t) = x₂(t), diff(x₂(t), t) = x₃(t), diff(x₃(t), t) = -24 x₁(t) + 14 x₂(t) + x₃(t) + rhs(Ecuacion) : SISTEMA₁; SISTEMA₂; SISTEMA₃

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = x_3(t)$$

$$\frac{d}{dt} x_3(t) = -24 x_1(t) + 14 x_2(t) + x_3(t) + 14 e^{3t} \quad (22)$$

> CONDICIONES := x₁(0) = rhs(Condiciones₁), x₂(0) = rhs(Condiciones₂), x₃(0) = rhs(Condiciones₃);

$$CONDICIONES := x_1(0) = 9, x_2(0) = 12, x_3(0) = 92 \quad (23)$$

>

FIN RESPUESTA 4)

>

5) (10/100 puntos) OBTENER SU MATRIZ EXPONENCIAL.

> AA := array([[0, 1, 0], [0, 0, 1], [-24, 14, 1]])

$$AA := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & 14 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

> MatExp := exponential(AA, t)

MatExp :=

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{7} e^{-4t} + 2 e^{2t} - \frac{8}{7} e^{3t} & \frac{2}{7} e^{3t} - \frac{1}{6} e^{2t} - \frac{5}{42} e^{-4t} & \frac{1}{7} e^{3t} - \frac{1}{6} e^{2t} + \frac{1}{42} e^{-4t} \\ -\frac{24}{7} e^{3t} + 4 e^{2t} - \frac{4}{7} e^{-4t} & \frac{10}{21} e^{-4t} - \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{6}{7} e^{3t} & \frac{3}{7} e^{3t} - \frac{1}{3} e^{2t} - \frac{2}{21} e^{-4t} \\ 8 e^{2t} + \frac{16}{7} e^{-4t} - \frac{72}{7} e^{3t} & \frac{18}{7} e^{3t} - \frac{2}{3} e^{2t} - \frac{40}{21} e^{-4t} & \frac{8}{21} e^{-4t} + \frac{9}{7} e^{3t} - \frac{2}{3} e^{2t} \end{bmatrix}$$

> Identidad := map(rcurry(eval, t='0'), MatExp)

(26)

$$\text{Identidad} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

> $\text{Ceros} := \text{evalm}(\text{map}(\text{diff}, \text{MatExp}, t) - \text{evalm}(\text{AA} \&* \text{MatExp}))$

$$\text{Ceros} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

>

FIN RESPUESTA 5)

>

6) (10/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SISTEMA EQUIVALENTE.

> SISTEMA;

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t), \quad \frac{d}{dt} x_2(t) = x_3(t), \quad \frac{d}{dt} x_3(t) = -24 x_1(t) + 14 x_2(t) + x_3(t) + 14 e^{3t} \quad (28)$$

> CONDICIONES

$$x_1(0) = 9, x_2(0) = 12, x_3(0) = 92 \quad (29)$$

> SOLUCION := dsolve({SISTEMA, CONDICIONES}) : SOLUCION₁; SOLUCION₂;
SOLUCION₃

$$x_1(t) = 4 e^{3t} + 2 e^{-4t} + 3 e^{2t} + 2 e^{3t} t$$

$$x_2(t) = 14 e^{3t} - 8 e^{-4t} + 6 e^{2t} + 6 e^{3t} t$$

$$x_3(t) = 48 e^{3t} + 32 e^{-4t} + 12 e^{2t} + 18 e^{3t} t \quad (30)$$

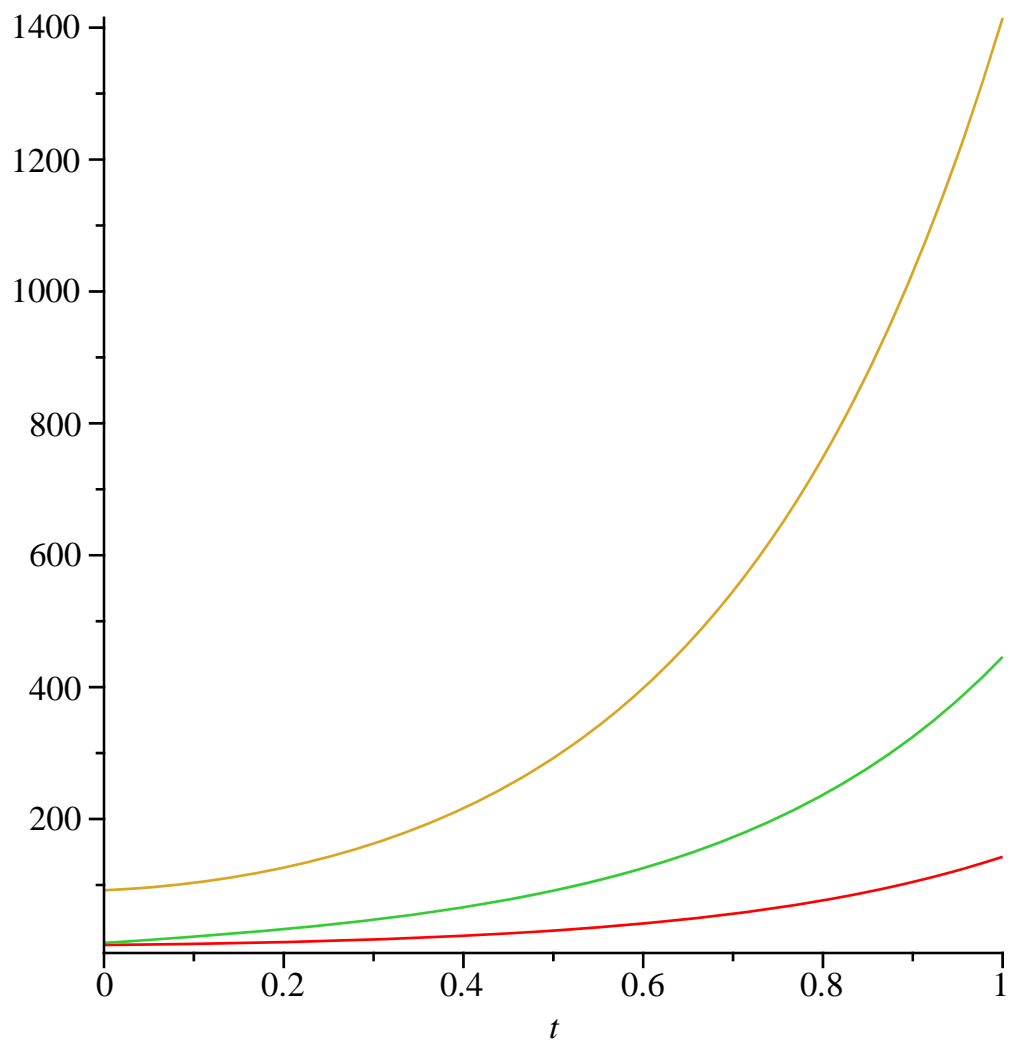
>

FIN RESPUESTA 6)

>

7) (10/100 puntos) GRAFICAR JUNTAS LAS TRES FUNCIONES DE LA SOLUCION PARTICULAR DEL SISTEMA OBTENIDA (en el inciso anterior), PARA UN INTERVALO $0 < t < 1$.

> $\text{plot}([\text{rhs}(\text{SOLUCION}_1), \text{rhs}(\text{SOLUCION}_2), \text{rhs}(\text{SOLUCION}_3)], t = 0..1)$



[>
FIN RESPUESTA 7)
[>
FIN DEL EXAMEN
[>