>

SOLUCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN PARCIAL
SEMESTRE 2019-2

2019 MARZO 21

>

1) (35/100 puntos) DADA DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL NO LINEAL DE PRIMER ORDEN CUYA SU SOLUCIÓN GENERAL ES:

$$Ecuacion := \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 - \frac{2\,y(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)}{x} = -4$$

$$SolucionGeneral := y(x) = \frac{x^2}{C_1} + C_1 \qquad \textbf{(1)}$$

E INDIQUE CUÁLES DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES SON SOLUCIÓN Y DE QUÉ TIPO (particular o singular) Y CUÁLES NO LO SON, ARGUMENTANDO CADA RESULTADO
(5 puntos cada respuesta correcta menos 2 puntos por cada respuesta incorrecta)

$$funcion_1 := y(x) = -\frac{1}{5}\,x^2 + 5$$

$$funcion_2 := y(x) = \frac{1}{3}\,x^2 + 3$$

$$funcion_3 := y(x) = -x^2 - 1$$

$$funcion_4 := y(x) = x^2 + 1$$

$$funcion_5 := y(x) = 2\,x$$

$$funcion_6 := y(x) = -4\,x$$

$$funcion_7 := y(x) = 4\,x \qquad \textbf{(2)}$$

> *restart*

> $Ecuacion := \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 - \frac{2\,y(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)}{x} = -4$

$$Ecuacion := \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 - \frac{2\,y(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)}{x} = -4 \qquad \textbf{(3)}$$

> $SolucionGeneral := y(x) = \frac{x^2}{C_1} + C_1$

$$SolucionGeneral := y(x) = \frac{x^2}{C_1} + C_1 \qquad \textbf{(4)}$$

> $ComprobacionCero := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(SolucionGeneral), Ecuacion)))$

$$ComprobacionCero := -4 = -4 \qquad \textbf{(5)}$$

La Solución General satisface la Ecuación

> $funcion_1 := y(x) = -\frac{1}{5}\,x^2 + 5$

$$funcion_1 := y(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 5 \quad (6)$$

> $CombrobacionUno := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_1), Ecuacion)))$

$$ComprobacionUno := 4 = -4 \quad (7)$$

La *funcion*$_1$ no es solución *dado que no satisface la Ecuación*

> $funcion_2 := y(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3$

$$funcion_2 := y(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3 \quad (8)$$

> $ComprobacionDos := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_2), Ecuacion)))$

$$ComprobacionDos := -4 = -4 \quad (9)$$

La *funcion*$_2$ *es solución pues satisface la Ecuación*

> $ParametroDos := solve(rhs(SolucionGeneral) = rhs(funcion_2), C_1)$

$$ParametroDos := 3, \frac{1}{3}x^2 \quad (10)$$

Como el parámetro C_1 *toma el valor de* 3, *entonces funcion*$_2$ *es una solución* particular

> $funcion_3 := y(x) = -x^2 - 1$

$$funcion_3 := y(x) = -x^2 - 1 \quad (11)$$

> $ComprobacionTres := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_3), Ecuacion)))$

$$ComprobacionTres := -4 = -4 \quad (12)$$

La *funcion*$_3$ *es solución pues satisface la Ecuación*

> $ParametroTres := solve(rhs(SolucionGeneral) = rhs(funcion_3), C_1)$

$$ParametroTres := -1, -x^2 \quad (13)$$

Como el parámetro C_1 *toma el valor de* -1, *entonces funcion*$_3$ *es una solución* particular

> $funcion_4 := y(x) = x^2 + 1$

$$funcion_4 := y(x) = x^2 + 1 \quad (14)$$

> $ComprobacionCuatro := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_4), Ecuacion)))$

$$ComprobacionCuatro := -4 = -4 \quad (15)$$

La *funcion*$_4$ *es solución pues satisface la Ecuación*

> $ParametroCuatro := solve(rhs(SolucionGeneral) = rhs(funcion_4), C_1)$

$$ParametroCuatro := 1, x^2 \quad (16)$$

Como el parámetro C_1 *toma el valor de* 1, *entonces funcion*$_4$ *es una solución* particular

> $funcion_5 := y(x) = 2x$

$$funcion_5 := y(x) = 2x \quad (17)$$

> $ComprobacionCinco := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_5), Ecuacion)))$

$$ComprobacionCinco := -4 = -4 \quad (18)$$

La *funcion*$_5$ *es solución pues satisface la Ecuación*

> $ParametroCinco := solve\left(rhs(SolucionGeneral) = rhs\left(funcion_5\right), C_1\right)$

$$ParametroCinco := x, x \tag{19}$$

Como el parámetro C_1 *no toma el valor real alguno, entonces funcion*$_5$ *es una solución* *__singular__*

> $funcion_6 := y(x) = -4\,x$

$$funcion_6 := y(x) = -4\,x \tag{20}$$

> $ComprobacionSeis := simplify\left(eval\left(subs\left(y(x) = rhs\left(funcion_6\right), Ecuacion\right)\right)\right)$

$$ComprobacionSeis := -16 = -4 \tag{21}$$

La funcion$_6$ *__no es solución__ dado que no satisface la Ecuación*

> $funcion_7 := y(x) = 4\,x$

$$funcion_7 := y(x) = 4\,x \tag{22}$$

> $ComprobacionSiete := simplify\left(eval\left(subs\left(y(x) = rhs\left(funcion_7\right), Ecuacion\right)\right)\right)$

$$ComprobacionSiete := -16 = -4 \tag{23}$$

La funcion$_7$ *__no es solución__ dado que no satisface la Ecuación*

>

FIN RESPUESTA 1)

2) (35/100 puntos) OBTENGA LA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL CON LA CONDICIÓN INICIAL DADA - UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE EL MÉTODO DE FACTOR INTEGRANTE - (no utilizar dsolve, ni exactsol, ni separablesol)

$$2\,x\,y(x)\,\ln(y(x)) + \left(x^2 + y(x)^2\sqrt{y(x)^2+1}\right)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0$$

$$y(2) = 1 \tag{24}$$

> $restart$

> $Ecuacion := 2\,x\,y(x)\,\ln(y(x)) + \left(x^2 + y(x)^2\sqrt{y(x)^2+1}\right)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0$

$$Ecuacion := 2\,x\,y(x)\,\ln(y(x)) + \left(x^2 + y(x)^2\sqrt{y(x)^2+1}\right)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 0 \tag{25}$$

> $Condicion := y(2) = 1$

$$Condicion := y(2) = 1 \tag{26}$$

> $with(DEtools):$

> $intfactor(Ecuacion)$

$$\frac{1}{y(x)} \tag{27}$$

> $FI := \frac{1}{y}$

$$FI := \frac{1}{y} \tag{28}$$

> $M := 2\,x\,y\,\ln(y)$

$$M := 2\,x\,y\,\ln(y) \tag{29}$$

> $N := \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right)$

$$N := x^2 + y^2\sqrt{y^2+1} \tag{30}$$

> $ComprobacionUno := diff(M, y) - diff(N, x) \neq 0$

$$ComprobacionUno := 2\,x\ln(y) \neq 0 \quad (31)$$

La Ecuación no es exacta

> $MM := M \cdot FI$

$$MM := 2\,x\ln(y) \quad (32)$$

> $NN := expand(N \cdot FI)$

$$NN := \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1} \quad (33)$$

> $ComprobacionDos := diff(MM, y) - diff(NN, x) = 0$

$$ComprobacionDos := 0 = 0 \quad (34)$$

La Ecuación Segunda ya es exacta

> $IntMMx := int(MM, x)$

$$IntMMx := x^2\ln(y) \quad (35)$$

> $SolucionGeneral := IntMMx + int((NN - diff(IntMMx, y)), y) = C1$

$$SolucionGeneral := x^2\ln(y) + \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2} = C1 \quad (36)$$

> $SolGral := x^2\ln(y(x)) + \frac{1}{3}\left(y(x)^2+1\right)^{3/2} = C1$

$$SolGral := x^2\ln(y(x)) + \frac{1}{3}\left(y(x)^2+1\right)^{3/2} = C1 \quad (37)$$

> $DerSolGral := isolate(diff(SolGral, x), diff(y(x), x))$

$$DerSolGral := \frac{d}{dx}\,y(x) = -\frac{2\,x\ln(y(x))}{\frac{x^2}{y(x)} + \sqrt{y(x)^2+1}\;y(x)} \quad (38)$$

> $DerEcuacion := isolate(Ecuacion, diff(y(x), x))$

$$DerEcuacion := \frac{d}{dx}\,y(x) = -\frac{2\,x\,y(x)\ln(y(x))}{x^2 + y(x)^2\sqrt{y(x)^2+1}} \quad (39)$$

> $ComprobacionDos := simplify(rhs(DerSolGral) - rhs(DerEcuacion)) = 0$

$$ComprobacionDos := 0 = 0 \quad (40)$$

> $SolucionGeneral$

$$x^2\ln(y) + \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2} = C1 \quad (41)$$

> $Parametro := simplify(subs(x = 2, y = 1, lhs(SolucionGeneral))); evalf(\%)$

$$Parametro := \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$0.9428090414 \quad (42)$$

> $SolucionParticular := subs(C1 = Parametro, SolucionGeneral)$

$$SolucionParticular := x^2\ln(y) + \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \quad (43)$$

>

FIN RESPUESTA 2)

3) (25/100 puntos) DADA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA - DE SEGUNDO ORDEN - LINEAL - DE

COEFICIENTES CONSTANTES - NO HOMOGÉNEA OBTENER SU SOLUCIÓN GENERAL UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE EL <u>MÉTODO DE PARÁMETROS VARIABLES</u> (sin utilizar dsolve)

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 10 \left(\frac{d}{dt} x(t)\right) + 25\, x(t) = 30\, e^{-5t} \tag{44}$$

> *restart*

> $Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 10 \left(\frac{d}{dt} x(t)\right) + 25\, x(t) = 30\, e^{-5t}$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 10 \left(\frac{d}{dt} x(t)\right) + 25\, x(t) = 30\, e^{-5t} \tag{45}$$

> $EcuacionHom := lhs(Ecuacion) = 0$

$$EcuacionHom := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 10 \left(\frac{d}{dt} x(t)\right) + 25\, x(t) = 0 \tag{46}$$

> $Q := rhs(Ecuacion)$

$$Q := 30\, e^{-5t} \tag{47}$$

> $EcuacionCarac := m \cdot \cdot 2 + 10 \cdot m + 25 = 0$

$$EcuacionCarac := m^2 + 10\, m + 25 = 0 \tag{48}$$

> $Raiz := solve(EcuacionCarac)$

$$Raiz := -5, -5 \tag{49}$$

Como las raíces son reales y repetidas, entonces se trata de Caso II

> $x1 := \exp(Raiz[1] \cdot t)$

$$x1 := e^{-5t} \tag{50}$$

> $x2 := t \cdot \exp(Raiz[1] \cdot t)$

$$x2 := t\, e^{-5t} \tag{51}$$

> $SolucionHom := x(t) = C1 \cdot x1 + C2 \cdot x2$

$$SolucionHom := x(t) = C1\, e^{-5t} + C2\, t\, e^{-5t} \tag{52}$$

> $SolucionNoHom := x(t) = A \cdot x1 + B \cdot x2$

$$SolucionNoHom := x(t) = A\, e^{-5t} + B\, t\, e^{-5t} \tag{53}$$

> $with(linalg) :$

> $WW := wronskian([x1, x2], t)$

$$WW := \begin{bmatrix} e^{-5t} & t\, e^{-5t} \\ -5\, e^{-5t} & e^{-5t} - 5\, t\, e^{-5t} \end{bmatrix} \tag{54}$$

> $ZZ := array([0, Q])$

$$ZZ := \begin{bmatrix} 0 & 30\, e^{-5t} \end{bmatrix} \tag{55}$$

> $Param := linsolve(WW, ZZ)$

$$Param := \begin{bmatrix} -30\, t & 30 \end{bmatrix} \tag{56}$$

> $Aprima := Param[1]; Bprima := Param[2]$

$$Aprima := -30\, t$$

$$Bprima := 30 \quad (57)$$

> $A := int(Aprima, t) + C1; B := int(Bprima, t) + C2$

$$A := -15\,t^2 + C1$$

$$B := 30\,t + C2 \quad (58)$$

> $SolucionGeneral := factor(expand(SolucionNoHom))$

$$SolucionGeneral := x(t) = \frac{C2\,t + 15\,t^2 + C1}{\left(e^{t}\right)^5} \quad (59)$$

FIN RESPUESTA 3)

FIN EXAMEN