>

SOLUCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
TERCER EXAMEN PARCIAL (TEMA 4)
SEMESTRE 2019-2

2019 MAYO 23

> *restart*

1) (25/100 puntos) DADA LA SIGUIENTE ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN:

> $Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, y) + 4\left(\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} z(x, y)\right) + 4\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x, y)\right) = 0$

$$Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, y) + 4\left(\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} z(x, y)\right) + 4\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x, y)\right) = 0 \quad \textbf{(1)}$$

DEMOSTRAR QUE LAS SIGUIENTES DOS SOLUCIONES GENERALES LA SATISFACEN Y EXPLIQUE ¿PORQUÉ?

> $z(x, y) = F_1(-2x + y) + x \cdot F_2(-2x + y); z(x, y) = F_1(-2x + y) + y \cdot F_2(-2x + y)$

$$z(x, y) = F_1(-2x + y) + F_2(-2x + y)\, x$$

$$z(x, y) = F_1(-2x + y) + F_2(-2x + y)\, y \quad \textbf{(2)}$$

RESPUESTA 1)

> $Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, y) + 4\left(\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} z(x, y)\right) + 4\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x, y)\right) = 0$

$$Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, y) + 4\left(\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} z(x, y)\right) + 4\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x, y)\right) = 0 \quad \textbf{(3)}$$

> $SolucionGralUno := z(x, y) = F[1](Raiz[1] \cdot x + y) + x \cdot F[2](Raiz[1] \cdot x + y)$

$$SolucionGralUno := z(x, y) = F_1(-2x + y) + F_2(-2x + y)\, x \quad \textbf{(4)}$$

> $SolucionGralDos := z(x, y) = F[1](Raiz[1] \cdot x + y) + y \cdot F[2](Raiz[1] \cdot x + y)$

$$SolucionGralDos := z(x, y) = F_1(-2x + y) + F_2(-2x + y)\, y \quad \textbf{(5)}$$

> $ComprobacionUno := simplify(eval(subs(z(x, y) = rhs(SolucionGralUno), Ecuacion)))$

$$ComprobacionUno := 0 = 0 \quad \textbf{(6)}$$

> $ComprobacionDos := simplify(eval(subs(z(x, y) = rhs(SolucionGralDos), Ecuacion)))$

$$ComprobacionDos := 0 = 0 \quad \textbf{(7)}$$

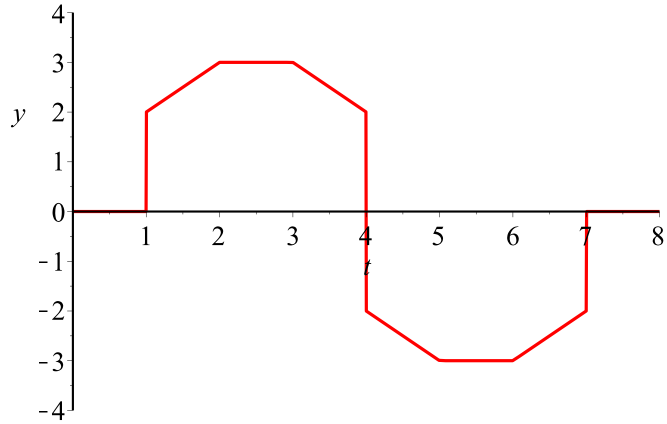
EN ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES PUEDEN EXISTIR MÁS DE UNA SOLUCIÓN GENERAL.
DADO QUE LAS RAICES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA CON EL MÉTODO GENERAL, SE REPITEN Y DEBE SOSTENERSE QUE AL SER DE SEGUNDO ORDEN LA ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES, SU SOLUCIÓN GENERAL DEBE CONTENER DOS FUNCIONES ARBITRARIAS, PUEDEN COEXISTIR DOS SOLUCIONES GENERALES SIMULTANEAMENTE.

FIN PREGUNTA 1)

> *restart*

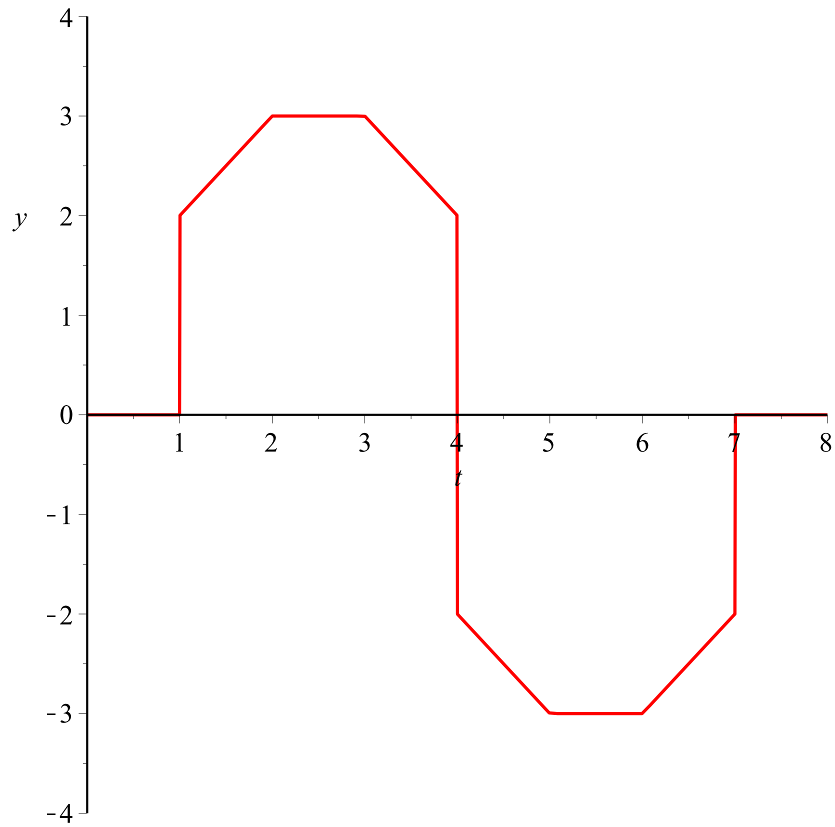
2) (35/100 puntos) DADA LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SIGUIENTE, OBTENER Y

GRAFICAR SU SERIE DE FOURIER PARA 500 TÉRMINOS EN EL INTERVALO 0 < t < 8



RESPUESTA 2)

> $f := 2\cdot \text{Heaviside}(t-1) + (t-1)\cdot\text{Heaviside}(t-1) - (t-2)\cdot\text{Heaviside}(t-2) - (t-3)\cdot\text{Heaviside}(t-3) + (t-4)\cdot\text{Heaviside}(t-4) - 4\cdot\text{Heaviside}(t-4) - (t-4)\cdot\text{Heaviside}(t-4) + (t-5)\cdot\text{Heaviside}(t-5) + (t-6)\cdot\text{Heaviside}(t-6) - (t-7)\cdot\text{Heaviside}(t-7) + 2\cdot\text{Heaviside}(t-7) : plot(f, t = 0..8, y = -4..4)$



>

> $L := 4; a_0 := \left(\frac{1}{L}\right) \cdot int(f, t = 0..2 \cdot L); C := \frac{a_0}{2}$

$$L := 4$$
$$a_0 := 0$$
$$C := 0 \tag{8}$$

> $a_n := simplify\left(\left(\frac{1}{L}\right) \cdot int\left(f \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot t}{L}\right), t = 0..2 \cdot L\right)\right)$

$$a_n := -\frac{1}{n^2 \pi^2}\left(2\left(n\,\pi \sin\left(\frac{1}{4}\,n\,\pi\right) + 2\cos\left(\frac{1}{4}\,n\,\pi\right) - 2\cos\left(\frac{1}{2}\,n\,\pi\right) - 2\cos\left(\frac{3}{4}\,n\,\pi\right) - 2\sin(n\,\pi)\,n\,\pi + 2\cos\left(\frac{5}{4}\,n\,\pi\right) + 2\cos\left(\frac{3}{2}\,n\,\pi\right) - 2\cos\left(\frac{7}{4}\,n\,\pi\right) + n\,\pi \sin\left(\frac{7}{4}\,n\,\pi\right)\right)\right) \tag{9}$$

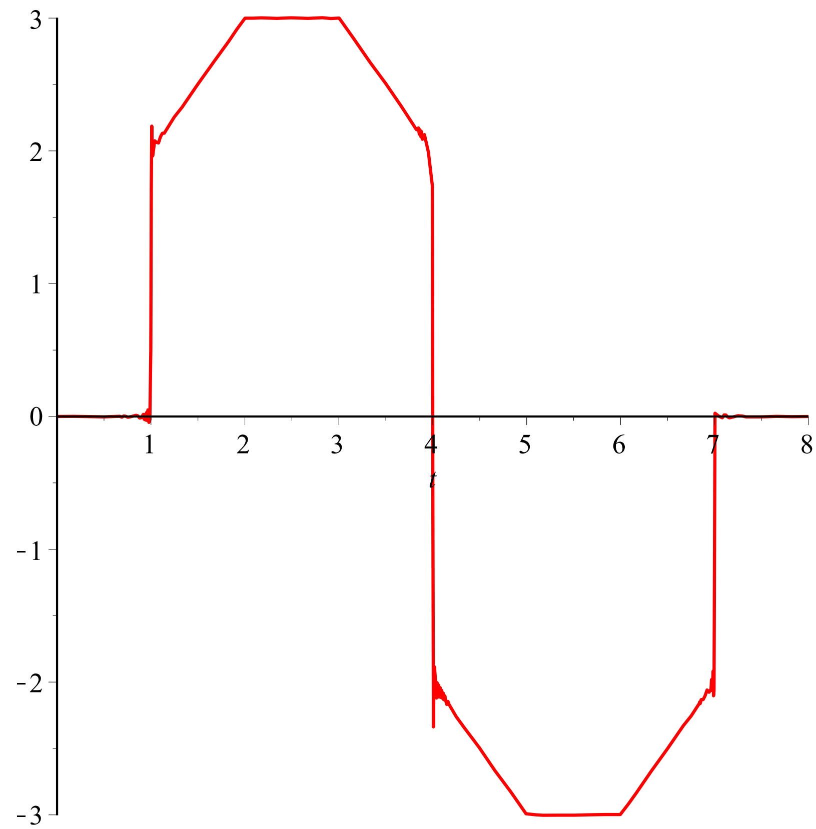
> $b_n := simplify\left(\left(\frac{1}{L}\right) \cdot int\left(f \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot t}{L}\right), t = 0..2 \cdot L\right)\right)$

(10)

$$b_n := \frac{1}{n^2 \pi^2} \left(2 \left(\cos\left(\frac{1}{4} n \pi\right) n \pi - 2 \sin\left(\frac{1}{4} n \pi\right) + 2 \sin\left(\frac{1}{2} n \pi\right) + 2 \sin\left(\frac{3}{4} n \pi\right) - 2 \cos(n \pi) n \pi - 2 \sin\left(\frac{5}{4} n \pi\right) - 2 \sin\left(\frac{3}{2} n \pi\right) + 2 \sin\left(\frac{7}{4} n \pi\right) + \cos\left(\frac{7}{4} n \pi\right) n \pi\right)\right) \quad \textbf{(10)}$$

> $STF_{500} := C + sum\left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \text{Pi} \cdot t}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \text{Pi} \cdot t}{L}\right), n = 1..500\right) :$

> $plot(STF_{500}, t = 0..8)$



>

FIN PREGUNTA 2)

> *restart*

3) (40/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES, UTILIZANDO EL **MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES** CON UNA **CONSTANTE DE SEPARACIÓN NEGATIVA**:

> $Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) = x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x, t)\right)$

$$Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, y(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\, y(x,t) = x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\, y(x,t)\right) \quad \textbf{(11)}$$

RESPUESTA 3)

> $Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, y(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\, y(x,t) = x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\, y(x,t)\right)$

$$Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, y(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\, y(x,t) = x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\, y(x,t)\right) \quad \textbf{(12)}$$

> $EcuacionUno := eval(subs(y(x,t) = F(x) \cdot G(t), Ecuacion))$

$$EcuacionUno := F(x)\left(\frac{d^2}{dt^2}\, G(t)\right) + F(x)\left(\frac{d}{dt}\, G(t)\right) = x^2 \left(\frac{d}{dx}\, F(x)\right) G(t) \quad \textbf{(13)}$$

> $EcuacionDos := simplify\left(\frac{lhs(EcuacionUno)}{F(x) \cdot G(t)}\right) = simplify\left(\frac{rhs(EcuacionUno)}{F(x) \cdot G(t)}\right)$

$$EcuacionDos := \frac{\frac{d^2}{dt^2}\, G(t) + \frac{d}{dt}\, G(t)}{G(t)} = \frac{x^2 \left(\frac{d}{dx}\, F(x)\right)}{F(x)} \quad \textbf{(14)}$$

> $EcuacionT := lhs(EcuacionDos) = -\text{beta}\cdot\cdot 2;\ EcuacionX := rhs(EcuacionDos) = -\text{beta}\cdot\cdot 2$

$$EcuacionT := \frac{\frac{d^2}{dt^2}\, G(t) + \frac{d}{dt}\, G(t)}{G(t)} = -\beta^2$$

$$EcuacionX := \frac{x^2 \left(\frac{d}{dx}\, F(x)\right)}{F(x)} = -\beta^2 \quad \textbf{(15)}$$

> $SolucionT := dsolve(EcuacionT);\ SolucionX := dsolve(EcuacionX)$

$$SolucionT := G(t) = \_C1\, e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2}\right) t} + \_C2\, e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2}\right) t}$$

$$SolucionX := F(x) = \_C1\, e^{\frac{\beta^2}{x}} \quad \textbf{(16)}$$

> $SolucionGeneral := y(x,t) = subs(\_C1 = 1, rhs(SolucionX)) \cdot rhs(SolucionT)$

$$SolucionGeneral := y(x,t) = e^{\frac{\beta^2}{x}} \left(\_C1\, e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2}\right) t} + \_C2\, e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2}\right) t}\right) \quad \textbf{(17)}$$

>

FIN PREGUNTA 3)

> *restart*

FIN DEL EXAMEN

>