\>

SOLUCION

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN PARCIAL
SEMESTRE 2013-2

1 ABRIL 2013

\> *restart*

1) **(20/100 puntos)**

a) DÉ LA CLASIFICACIÓN (ordinaria o derivadas parciales, orden, grado, lineal o no lineal) PARA LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL **(10 puntos)**:

$$x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 - 2\,y(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = -4\,x \qquad \textbf{(1)}$$

b) DADA LA SOLUCIÓN GENERAL, INDIQUE CUÁLES DE LAS SIGUIENTES CINCO FUNCIONES SON SOLUCIÓN Y DE QUÉ TIPO (particular o singular) Y CUÁLES NO LO SON, ARGUMENTANDO MATEMÁTICAMENTE CADA RESULTADO

(2 puntos por cada respuesta correcta menos 1 puntos por cada respuesta incorrecta)

$$SolucionGeneral := y(x) = \frac{x^2}{C_1} + C_1$$

$$funcion_1 := y(x) = \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{3}$$

$$funcion_2 := y(x) = \frac{1}{5}\,x^2 - 5$$

$$funcion_3 := y(x) = -x^2 - 1$$

$$funcion_4 := y(x) = -2\,x$$

$$funcion_5 := y(x) = 2\,x \qquad \textbf{(2)}$$

\> *restart*

RESPUESTA 1a)

\>

Ecuación Diferencial Ordinaria - Primer Orden - No-Lineal - Segundo Grado {**EDO(1)NL(G=2)**}

\>

RESPUESTA 1b)

\> $Ecuacion := x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 - 2\,y(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = -4\,x$

$$Ecuacion := x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 - 2\,y(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = -4\,x \qquad \textbf{(3)}$$

\> $SolucionGeneral := y(x) = \frac{x^2}{C_1} + C_1$

$$SolucionGeneral := y(x) = \frac{x^2}{C_1} + C_1 \qquad \textbf{(4)}$$

\> $comprobacion_0 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(SolucionGeneral), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

(5)

$$comprobacion_0 := 0 = 0 \quad \textbf{(5)}$$

LA SOLUCIÓN GENERAL ES CORRECTA Y ÚNICA

> $funcion_1 := y(x) = \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{3}$

$$funcion_1 := y(x) = \frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{3} \quad \textbf{(6)}$$

> $comprobacion_1 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_1), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comprobacion_1 := \frac{32}{9}\,x = 0 \quad \textbf{(7)}$$

LA PRIMERA FUNCIÓN NO ES SOLUCIÓN

> $funcion_2 := y(x) = \frac{1}{5}\,x^2 - 5$

$$funcion_2 := y(x) = \frac{1}{5}\,x^2 - 5 \quad \textbf{(8)}$$

> $comprobacion_2 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_2), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comprobacion_2 := 8\,x = 0 \quad \textbf{(9)}$$

LA SEGUNDA FUNCIÓN NO ES SOLUCIÓN

> $funcion_3 := y(x) = -x^2 - 1$

$$funcion_3 := y(x) = -x^2 - 1 \quad \textbf{(10)}$$

> $comprobacion_3 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_3), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comprobacion_3 := 0 = 0 \quad \textbf{(11)}$$

> $parametro_3 := solve(rhs(SolucionGeneral) = rhs(funcion_3), C_1)$

$$parametro_3 := -1,\ -x^2 \quad \textbf{(12)}$$

COMO LA TERCERA FUNCIÓN ES SOLUCIÓN Y C1 TOMA EL VALOR DE - 1, ENTONCES ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR

> $funcion_4 := y(x) = -2\,x$

$$funcion_4 := y(x) = -2\,x \quad \textbf{(13)}$$

> $comprobacion_4 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_4), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comprobacion_4 := 0 = 0 \quad \textbf{(14)}$$

> $parametro_4 := solve(rhs(SolucionGeneral) = rhs(funcion_4), C_1)$

$$parametro_4 := -x,\ -x \quad \textbf{(15)}$$

COMO LA CUARTA FUNCIÓN ES SOLUCIÓN PERO C1 NO TOMA NINGÚN VALOR REAL, ENTONCES SE TRATA DE UNA SOLUCIÓN SINGULAR

> $funcion_5 := y(x) = 2\,x$

$$funcion_5 := y(x) = 2\,x \quad \textbf{(16)}$$

> $comprobacion_5 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_5), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comprobacion_5 := 0 = 0 \quad (17)$$

> $parametro_5 := solve(rhs(SolucionGeneral) = rhs(funcion_5), C_1)$

$$parametro_5 := x, x \quad (18)$$

COMO LA QUINTA FUNCIÓN ES SOLUCIÓN PERO C1 NO TOMA NINGÚN VALOR REAL, ENTONCES SE TRATA DE UNA SOLUCIÓN SINGULAR

> $Solucion := dsolve(Ecuacion)$

$$Solucion := y(x) = -2x, y(x) = 2x, y(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{\_C1^2} - 4\right)\_C1 \quad (19)$$

> $SolSingular_1 := Solucion_1$

$$SolSingular_1 := y(x) = -2x \quad (20)$$

> $SolSingular_2 := Solucion_2$

$$SolSingular_2 := y(x) = 2x \quad (21)$$

> $SolGral := expand\left(simplify\left(subs\left(\_C1 = \frac{C_1}{2}, Solucion_3\right)\right)\right)$

$$SolGral := y(x) = \frac{x^2}{C_1} + C_1 \quad (22)$$

SE COMPRUEBAN LA SOLUCIÓN GENERAL Y LAS DOS SINGULARES

>

FIN RESPUESTA 1)

> restart

2) (20/100)

DADA LA SIGUIENTE SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DESCONOCIDA

$$y(x) = C_1 e^{-2x}\cos(2x) + C_2 e^{-2x}\sin(2x) + \cos(2x) + 5\sin(2x) \quad (23)$$

a) OBTENGA LA **SOLUCIÓN PARTICULAR** DADAS LAS CONDICIONES DE FRONTERA SIGUIENTES **(5 puntos)**

$$y(0) = 2$$

$$y\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2 \quad (24)$$

b) **GRAFIQUE** LA SOLUCION PARTICULAR OBTENIDA EN EL INCISO a) PARA EL DADO INTERVALO CON LAS CONDICIONES DE FRONTERA DEL MISMO INCISO. **(5 puntos)**

c) OBTENGA SU **ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL** CORRESPONDIENTE Y **CLASIFÍQUELA** (por tipo de coeficientes y tipo de homogeneidad). **(10 puntos)**

> restart

RESPUESTA 2a)

> $SolucionGeneral := y(x) = C_1 e^{-2x}\cos(2x) + C_2 e^{-2x}\sin(2x) + \cos(2x) + 5\sin(2x)$

$$SolucionGeneral := y(x) = C_1 e^{-2x}\cos(2x) + C_2 e^{-2x}\sin(2x) + \cos(2x) + 5\sin(2x) \quad (25)$$

> $Condiciones := y(0) = 2, y\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2$

$$Condiciones := y(0) = 2, y\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2 \tag{26}$$

> $Sistema := eval\left(subs\left(x = 0, rhs(SolucionGeneral) = rhs\left(Condiciones_1\right)\right)\right), eval\left(subs\left(x = \frac{\text{Pi}}{4}, rhs(SolucionGeneral) = rhs\left(Condiciones_2\right)\right)\right) : Sistema_1; Sistema_2$

$$C_1 + 1 = 2$$

$$5 + C_2 e^{-\frac{1}{2}\pi} = 2 \tag{27}$$

> $Parametro := solve(\{Sistema\})$

$$Parametro := \left\{C_1 = 1, C_2 = -\frac{3}{e^{-\frac{1}{2}\pi}}\right\} \tag{28}$$

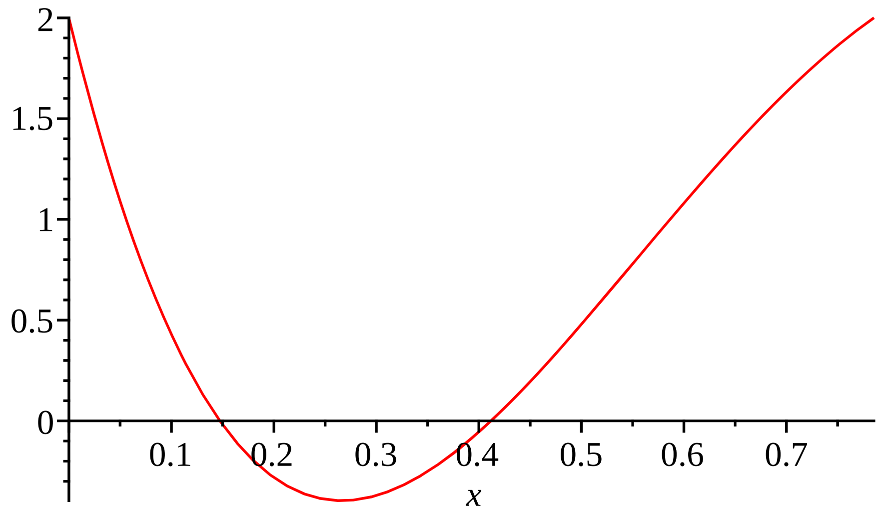
> $SolucionParticular := simplify\left(eval\left(subs\left(C_1 = rhs\left(Parametro_1\right), C_2 = rhs\left(Parametro_2\right), SolucionGeneral\right)\right)\right)$

$$SolucionParticular := y(x) = e^{-2x}\cos(2x) - 3\,e^{-2x + \frac{1}{2}\pi}\sin(2x) + \cos(2x) + 5\sin(2x) \tag{29}$$

>

RESPUESTA 2b)

> $plot\left(rhs(SolucionParticular), x = 0..\frac{\text{Pi}}{4}\right)$



>

RESPUESTA 2c)

> $SolucionGeneralHomogenea := y(x) = rhs(SolucionGeneral) - (\cos(2x) + 5\sin(2x))$

$$SolucionGeneralHomogenea := y(x) = C_1 e^{-2x}\cos(2x) + C_2 e^{-2x}\sin(2x) \tag{30}$$

> $SolucionParticularNoHomogenea := y(x) = \cos(2x) + 5\sin(2x)$

$$SolucionParticularNoHomogenea := y(x) = \cos(2x) + 5\sin(2x) \tag{31}$$

> $EcuacionCaracteristica := expand((m - (-2) + 2I)\cdot(m - (-2) - 2I)) = 0$

$$EcuacionCaracteristica := m^2 + 4\,m + 8 = 0 \quad \textbf{(32)}$$

> $EcuacionHomogenea := diff\,(y(x), x\$2) + 4\,diff\,(y(x), x) + 8\,y(x) = 0$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + 4\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 8\,y(x) = 0 \quad \textbf{(33)}$$

> $Q := eval(subs(y(x) = rhs(SolucionParticularNoHomogenea), lhs(EcuacionHomogenea)))$

$$Q := 44\cos(2\,x) + 12\sin(2\,x) \quad \textbf{(34)}$$

> $EcuacionNoHomogenea := lhs(EcuacionHomogenea) = Q$

$$EcuacionNoHomogenea := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + 4\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 8\,y(x) = 44\cos(2\,x) + 12\sin(2\,x) \quad \textbf{(35)}$$

CLASIFICACIÓN: Ecuacion Diferencial Ordinaria - Segundo Orden - Lineal - coeficientes constantes - No Homogénea **EDO(2)L.cc.N-H**

>

FIN RESPUESTA 2)

> *restart*

3) (20/100)

OBTENER LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN **(SIN UTILIZAR dsolve)**

$$\frac{d}{dt}\,x(t) + x(t)\sin(t) = \sin(t)\cos(t) \quad \textbf{(36)}$$

> *restart*

RESPUESTA 3)

> $Ecuacion := \frac{d}{dt}\,x(t) + x(t)\sin(t) = \sin(t)\cos(t)$

$$Ecuacion := \frac{d}{dt}\,x(t) + x(t)\sin(t) = \sin(t)\cos(t) \quad \textbf{(37)}$$

> $p := \sin(t); q := \sin(t)\cdot\cos(t)$

$$p := \sin(t)$$
$$q := \sin(t)\cos(t) \quad \textbf{(38)}$$

> $IntExpPneg := \exp(-int(p, t)); IntExpPpos := \exp(int(p, t)); IntQ := int(IntExpPpos\cdot q, t)$

$$IntExpPneg := e^{\cos(t)}$$
$$IntExpPpos := e^{-\cos(t)}$$
$$IntQ := e^{-\cos(t)}\cos(t) + e^{-\cos(t)} \quad \textbf{(39)}$$

> $SolucionGeneral := x(t) = simplify(C_1\cdot IntExpPneg + IntExpPneg\cdot IntQ)$

$$SolucionGeneral := x(t) = C_1\,e^{\cos(t)} + \cos(t) + 1 \quad \textbf{(40)}$$

> $comprobacion := simplify(eval(subs(x(t) = rhs(SolucionGeneral), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comprobacion := 0 = 0 \quad \textbf{(41)}$$

>

FIN RESPUESTA 3)

> *restart*

4) (20/100)

OBTENER LA MATRIZ **A** DE COEFICIENTES CONSTANTES CUYA **MATRIZ**

EXPONENCIAL ESTÁ DADA POR LA SIGUIENTE EXPRESIÓN

$$MatrizExponencial := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \end{bmatrix} e^{4t} \quad \textbf{(42)}$$

> *restart*

RESPUESTA 4)

> $MatrizExponencial := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \end{bmatrix} e^{4t}$

$$MatrizExponencial := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} + \frac{1}{4} t + \frac{3}{16} e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{4t} & -\frac{5}{16} - \frac{1}{4} t + \frac{5}{16} e^{4t} \\ -\frac{3}{8} - \frac{1}{2} t + \frac{3}{8} e^{4t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{4t} & -\frac{5}{8} + \frac{1}{2} t + \frac{5}{8} e^{4t} \\ -\frac{3}{16} + \frac{1}{4} t + \frac{3}{16} e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{4t} & \frac{11}{16} - \frac{1}{4} t + \frac{5}{16} e^{4t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(43)}$$

> *with(linalg) :*

> *DerMatExp := map(diff, MatrizExponencial, t)*

$$DerMatExp := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{4t} & e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} e^{4t} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{4t} & 2 e^{4t} & \frac{1}{2} + \frac{5}{2} e^{4t} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{4t} & e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} e^{4t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(44)}$$

> *AA := map(rcurry(eval, t ='0'), DerMatExp)*

$$AA := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(45)}$$

> *compobacionMatExp := exponential(AA, t)*

(46)

$$compobacionMatExp := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} & -\frac{5}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{16}e^{4t} \\ -\frac{3}{8} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}e^{4t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{4t} & -\frac{5}{8} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{8}e^{4t} \\ -\frac{3}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} & \frac{11}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{16}e^{4t} \end{bmatrix} \quad (46)$$

>

FIN RESPUESTA 4)

> *restart*

5) (20/100)

a) OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SIGUIENTE SISTEMA CON LAS CONDICIONES: x(0) = 1 y(0) = - 1 z(0) = 0 **(15 puntos)**

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t) + y(t) + z(t) + t^2 e^t$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) + y(t) + z(t) + t\, e^t$$
$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^t \quad (47)$$

b) GRAFICAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA EN EL INCISO **a)** EN EL INTERVALO 0 < t < 1 **(5 puntos)**

>

RESPUESTA 5a)

> $Sistema := \frac{d}{dt}x(t) = x(t) + y(t) + z(t) + t\cdot\cdot 2\cdot e^t, \frac{d}{dt}y(t) = x(t) + y(t) + z(t) + t\cdot e^t, \frac{d}{dt}z(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^t$

$$Sistema := \frac{d}{dt}x(t) = x(t) + y(t) + z(t) + t^2 e^t, \frac{d}{dt}y(t) = x(t) + y(t) + z(t) + t\, e^t, \frac{d}{dt}z(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^t \quad (48)$$

> $Condiciones := x(0) = 1, y(0) = -1, z(0) = 0$

$$Condiciones := x(0) = 1, y(0) = -1, z(0) = 0 \quad (49)$$

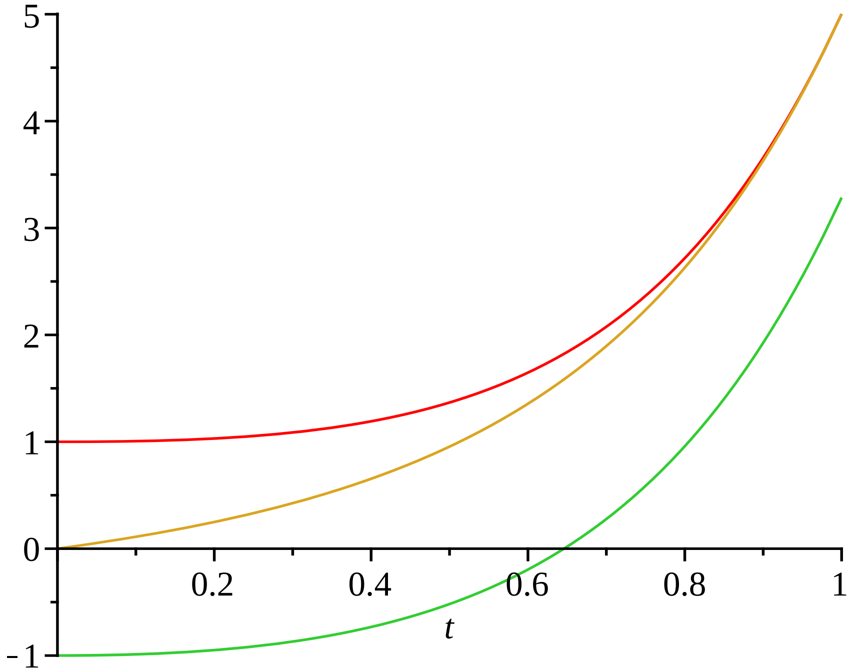
> $SolPart := dsolve(\{Sistema, Condiciones\}) : SolPart_1; SolPart_2; SolPart_3$

$$x(t) = e^t - 2\, t\, e^t + \frac{1}{2}t^2 e^t + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}$$
$$y(t) = -2\, e^t + t\, e^t - \frac{1}{2}t^2 e^t + \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}t^2 e^t + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} \quad (50)$$

>

RESPUESTA 5b)

> $plot([rhs(SolPart_1), rhs(SolPart_2), rhs(SolPart_3)], t = 0..1)$



\>

FIN RESPUESTA 5)

\> *restart*

FIN DEL EXAMEN

\> *restart*

\>