

>
=

SOLUCIÓN

>
=

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEMESTRE 2014-1
PRIMER EXAMEN PARCIAL

2013-10-07

>
=

DADO EL PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES CON LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA - DE SEGUNDO ORDEN - LINEAL - DE COEFICIENTES CONSTANTES - NO HOMOGÉNEA

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 10 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 25 x(t) = 20 e^{-5t}$$

$$x(0) = -5$$

$$D(x)(0) = 10$$

(1)

1) (30/100 puntos) OBTENER SU SOLUCIÓN GENERAL UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE EL MÉTODO DE PARÁMETROS VARIABLES (sin utilizar dsolve)

> Ecuacion := $\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + 10 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 25 x(t) = 20 \exp(-5t);$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 10 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 25 x(t) = 20 e^{-5t} \quad (2)$$

> Condiciones := $x(0) = -5, D(x)(0) = 10$

$$Condiciones := x(0) = -5, D(x)(0) = 10 \quad (3)$$

RESPUESTA 1)

> EcuHom := lhs(Ecuacion) = 0; Q := rhs(Ecuacion)

$$EcuHom := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 10 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 25 x(t) = 0$$

$$Q := 20 e^{-5t} \quad (4)$$

> EcuCarac := $m \cdot 2 + 10 \cdot m + 25 = 0$

$$EcuCarac := m^2 + 10m + 25 = 0 \quad (5)$$

> Raiz := solve(EcuCarac)

$$Raiz := -5, -5 \quad (6)$$

CASO II .- raíces reales e iguales

> SolUno := $x(t) = \exp(Raiz_1 \cdot t); SolDos := x(t) = t \cdot \exp(Raiz_1 \cdot t)$

$$SolUno := x(t) = e^{-5t}$$

$$SolDos := x(t) = t e^{-5t} \quad (7)$$

> SolHom := $x(t) = C_1 \cdot rhs(SolUno) + C_2 \cdot rhs(SolDos)$

(8)

$$\text{SolHom} := x(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 t e^{-5t} \quad (8)$$

Por Parámetros Variables

> with(linalg) :

> WW := wronskian([rhs(SolUno), rhs(SolDos)], t)

$$WW := \begin{bmatrix} e^{-5t} & t e^{-5t} \\ -5 e^{-5t} & e^{-5t} - 5 t e^{-5t} \end{bmatrix} \quad (9)$$

> BB := array([0, Q])

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & 20 e^{-5t} \end{bmatrix} \quad (10)$$

> ParPrimos := linsolve(WW, BB)

$$\text{ParPrimos} := \begin{bmatrix} -20 t & 20 \end{bmatrix} \quad (11)$$

> Aprima := ParPrimos₁; Bprima := ParPrimos₂

$$\text{Aprima} := -20 t$$

$$\text{Bprima} := 20 \quad (12)$$

> A := int(Aprima, t) + C₁; B := int(Bprima, t) + C₂

$$A := -10 t^2 + C_1$$

$$B := 20 t + C_2 \quad (13)$$

> SolucionGeneral := x(t) = simplify(A·rhs(SolUno) + B·rhs(SolDos))

$$\text{SolucionGeneral} := x(t) = e^{-5t} (10 t^2 + C_1 + t C_2) \quad (14)$$

FIN RESPUESTA 1)

> restart

2) (20/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DADAS LAS CONDICIONES INICIALES (sin utilizar dsolve)

> SolucionGeneral := x(t) = e^{-5t} (10 t² + C₁ + t C₂)

$$\text{SolucionGeneral} := x(t) = e^{-5t} (10 t^2 + C_1 + t C_2) \quad (15)$$

> Condiciones := x(0) = -5, D(x)(0) = 10

$$\text{Condiciones} := x(0) = -5, D(x)(0) = 10 \quad (16)$$

RESPUESTA 2)

> Sistema := eval(subs(t=0, rhs(SolucionGeneral) = rhs(Condiciones₁))), eval(subs(t=0, rhs(diff(SolucionGeneral, t)) = rhs(Condiciones₂))) : Sistema₁; Sistema₂

$$C_1 = -5$$

$$-5 C_1 + C_2 = 10 \quad (17)$$

> Parametro := solve({Sistema}, {C₁, C₂})

$$\text{Parametro} := \{C_1 = -5, C_2 = -15\} \quad (18)$$

> SolucionParticular := subs(C₁ = rhs(Parametro₁), C₂ = rhs(Parametro₂), SolucionGeneral)

$$\text{SolucionParticular} := x(t) = e^{-5t} (10 t^2 - 5 - 15 t) \quad (19)$$

FIN RESPUESTA 2)

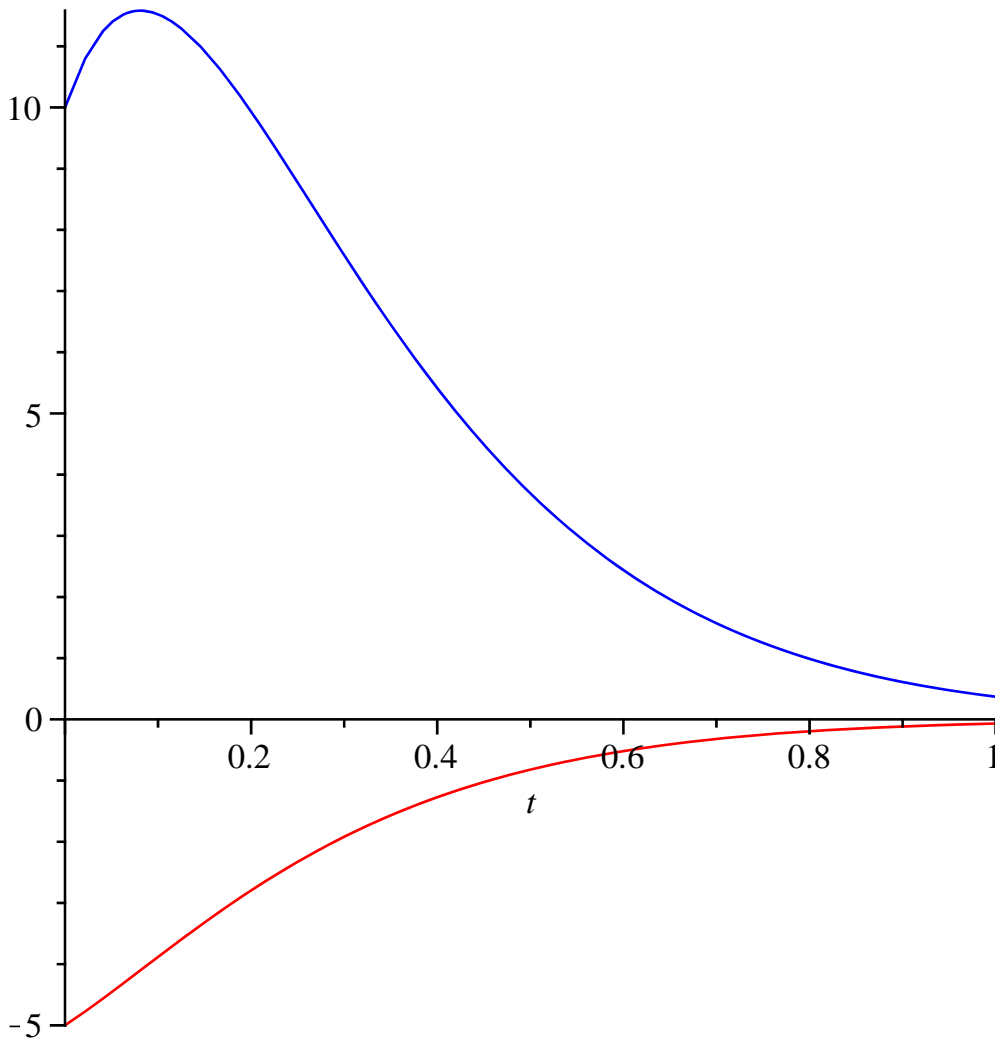
> restart

3) (5/100 puntos) GRAFICAR JUNTAS LA SOLUCIÓN PARTICULAR (obtenida en el inciso 2) Y SU PRIMERA DERIVADA, PARA UN INTERVALO DE $0 < t < 1$

> $SolucionParticular := x(t) = e^{-5t} (10 t^2 - 5 - 15 t)$
 $SolucionParticular := x(t) = e^{-5t} (10 t^2 - 5 - 15 t)$ (20)

RESPUESTA 3)

> $plot([rhs(SolucionParticular), rhs(diff(SolucionParticular, t))], t=0..1, color=[red, blue])$



FIN RESPUESTA 3)

> restart

4) (20/100 puntos) CONVERTIR LA ECUACIÓN EN UN SISTEMA EQUIVALENTE DE DOS ECUACIONES DIFERENCIALES CON DOS INCÓGNITAS INCLUIDAS SUS CONDICIONES INICIALES.

> $Ecuacion := \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + 10 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 25 x(t) = 20 \exp(-5 t);$
 $Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 10 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + 25 x(t) = 20 e^{-5t}$ (21)

> $Condiciones := x(0) = -5, D(x)(0) = 10$
 $Condiciones := x(0) = -5, D(x)(0) = 10$ (22)

RESPUESTA 4)

> *PrimeraIncognita* := $x(t) = x_1(t)$; *SegundaIncognita* := $\text{diff}(x_1(t), t) = x_2(t)$

$$\text{PrimeraIncognita} := x(t) = x_1(t)$$

$$\text{SegundaIncognita} := \frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t) \quad (23)$$

> *Sistema* := *SegundaIncognita*, $\text{diff}(x_2(t), t) = -25 \cdot x_1(t) - 10 \cdot x_2(t) + \text{rhs}(\text{Ecuacion})$:
*Sistema*₁; *Sistema*₂

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = -25 x_1(t) - 10 x_2(t) + 20 e^{-5t} \quad (24)$$

> *CondicionesIniciales* := $x_1(0) = \text{rhs}(\text{Condiciones}_1)$, $x_2(0) = \text{rhs}(\text{Condiciones}_2)$

$$\text{CondicionesIniciales} := x_1(0) = -5, x_2(0) = 10 \quad (25)$$

FIN RESPUESTA 4)

> restart

5) (10/100 puntos) OBTENER SU MATRIZ EXPONENCIAL DEL SISTEMA (obtenido en el inciso 4)

> *Sistema* := $\frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t)$, $\frac{d}{dt} x_2(t) = -25 x_1(t) - 10 x_2(t) + 20 e^{-5t}$: *Sistema*₁; *Sistema*₂

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = -25 x_1(t) - 10 x_2(t) + 20 e^{-5t} \quad (26)$$

RESPUESTA 5)

> AA := array([[0, 1], [-25, -10]])

$$AA := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix} \quad (27)$$

> with(linalg) :

> *MatrizExponencial* := exponential(AA, t)

$$\text{MatrizExponencial} := \begin{bmatrix} e^{-5t} + 5te^{-5t} & te^{-5t} \\ -25te^{-5t} & e^{-5t} - 5te^{-5t} \end{bmatrix} \quad (28)$$

RESULTADO

> *Identidad* := map(rcurry(eval, t=0'), *MatrizExponencial*)

$$\text{Identidad} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

> *DerMatrizExponencial* := map(diff, *MatrizExponencial*, t)

$$\text{DerMatrizExponencial} := \begin{bmatrix} -25te^{-5t} & e^{-5t} - 5te^{-5t} \\ -25e^{-5t} + 125te^{-5t} & -10e^{-5t} + 25te^{-5t} \end{bmatrix} \quad (30)$$

> *ProdAAMatExp* := evalm(AA &* *MatrizExponencial*)

$$ProdAAMatExp := \begin{bmatrix} -25 t e^{-5t} & e^{-5t} - 5 t e^{-5t} \\ -25 e^{-5t} + 125 t e^{-5t} & -10 e^{-5t} + 25 t e^{-5t} \end{bmatrix} \quad (31)$$

> *Comprobacion* := evalm(DerMatrizExponencial - ProdaAMatExp)

$$Comprobacion := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

FIN RESPUESTA 5)

> restart

6) (10/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SISTEMA (obtenido en el inciso 4)

> Sistema := $\frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t)$, $\frac{d}{dt} x_2(t) = -25 x_1(t) - 10 x_2(t) + 20 e^{-5t}$: Sistema₁; Sistema₂

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = -25 x_1(t) - 10 x_2(t) + 20 e^{-5t} \quad (33)$$

> CondicionesIniciales := $x_1(0) = -5$, $x_2(0) = 10$

$$CondicionesIniciales := x_1(0) = -5, x_2(0) = 10 \quad (34)$$

RESPUESTA 6)

> SolucionParticular := dsolve({Sistema, CondicionesIniciales}) : SolucionParticular₁;
SolucionParticular₂

$$x_1(t) = e^{-5t} (-5 - 15t + 10t^2)$$

$$x_2(t) = -e^{-5t} (-10 - 95t + 50t^2) \quad (35)$$

FIN RESPUESTA 6)

> restart

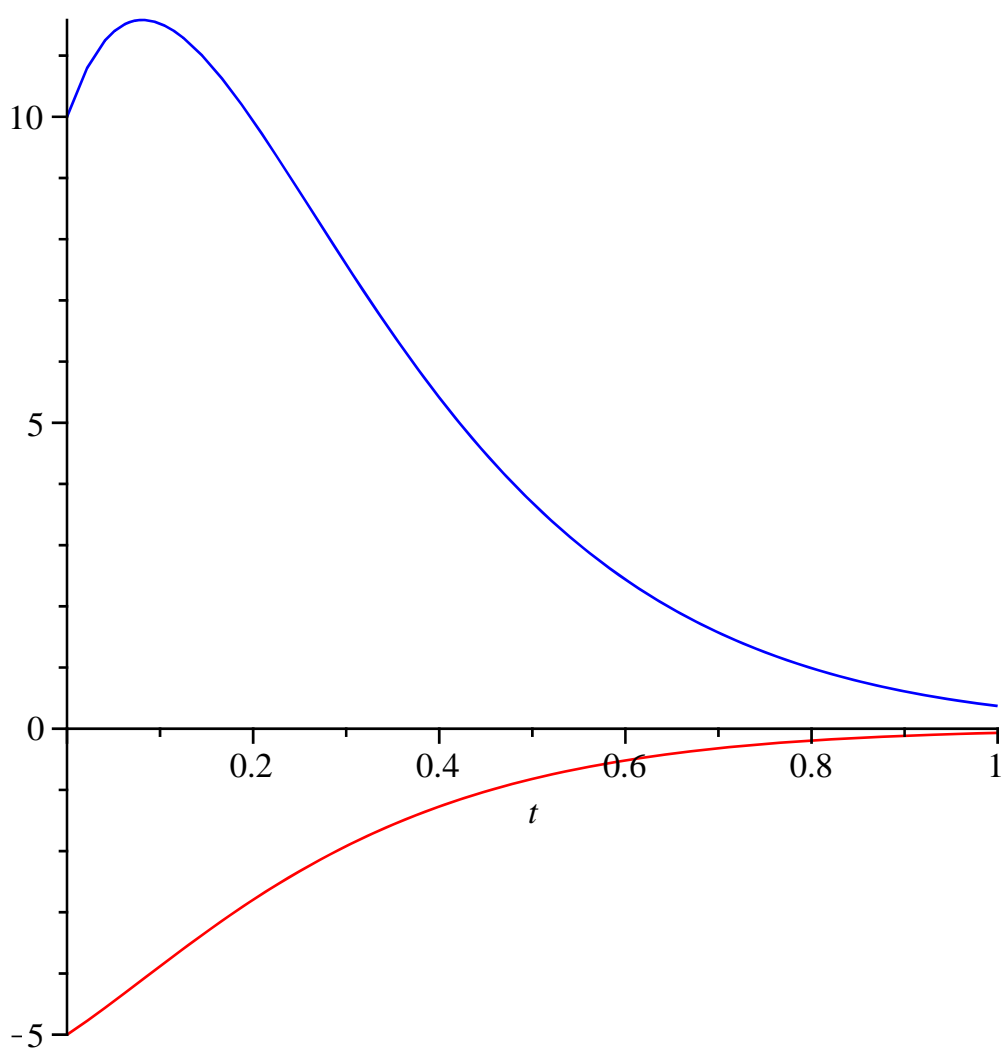
7) (5/100 puntos) GRAFICAR JUNTAS LAS DOS FUNCIONES DE LA SOLUCION PARTICULAR DEL SISTEMA (obtenida en el inciso 6), PARA UN INTERVALO $0 < t < 1$.

> SolucionParticular := $x_1(t) = e^{-5t} (-5 - 15t + 10t^2)$, $x_2(t) = -e^{-5t} (-10 - 95t + 50t^2)$;

$$SolucionParticular := x_1(t) = e^{-5t} (-5 - 15t + 10t^2), x_2(t) = -e^{-5t} (-10 - 95t + 50t^2) \quad (36)$$

RESPUESTA 7)

> plot([rhs(SolucionParticular₁), rhs(SolucionParticular₂)], t=0..1, color = [red, blue])



FIN RESPUESTA 7)

> restart

FIN DEL EXAMEN

>