>

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN PARCIAL
SEMESTRE 2015-1

29 SEPTIEMBRE 2014

> *restart*

1) **(20/100 puntos)**
a) OBTENER LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL NO HOMOGÉNEA, UTILIZANDO EL MÉTODO DE PARÁMETROS VARIABLES **(SIN UTILIZAR dsolve) (10 puntos)**

> $\frac{d^2}{dt^2} y(t) - 8\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + 16\, y(t) = 5\, e^{4t}$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) - 8\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + 16\, y(t) = 5\, e^{4t} \qquad \textbf{(1)}$$

b) CONVERTIR LA ECUACIÓN DEL INCISO a) EN UN SISTEMA DE ECUACIONES
Y OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DE ESTE SISTEMA PARA $y_1(0) = -4$ & $y_2(0) = 6$
UTILIZANDO EL MÉTODO DE LA MATRIZ EXPONENCIAL (**SIN UTILIZAR dsolve**)
(**10 puntos**)

> *restart*

Respuesta 1.a)

> $Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} y(t) - 8\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + 16\, y(t) = 5\, e^{4t};$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} y(t) - 8\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + 16\, y(t) = 5\, e^{4t} \qquad \textbf{(2)}$$

> $EcuaHom := lhs(Ecuacion) = 0$

$$EcuaHom := \frac{d^2}{dt^2} y(t) - 8\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) + 16\, y(t) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

> $Q := rhs(Ecuacion)$

$$Q := 5\, e^{4t} \qquad \textbf{(4)}$$

> $EcuaCarac := m\cdot\cdot 2 - 8\cdot m + 16 = 0$

$$EcuaCarac := m^2 - 8\, m + 16 = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

> $Raiz := solve(EcuaCarac)$

$$Raiz := 4, 4 \qquad \textbf{(6)}$$

Como se trata del caso II: raíces reales e iguales:

> $SolUno := y(t) = \exp(Raiz_1 \cdot t);\ SolDos := y(t) = t\cdot \exp(Raiz_1 \cdot t)$

$$SolUno := y(t) = e^{4t}$$
$$SolDos := y(t) = t\, e^{4t} \qquad \textbf{(7)}$$

> $SolHom := y(t) = C_1 \cdot rhs(SolUno) + C_2 \cdot rhs(SolDos)$

$$SolHom := y(t) = C_1\, e^{4t} + C_2\, t\, e^{4t} \qquad \textbf{(8)}$$

> $SolNoHom := y(t) = A\cdot rhs(SolUno) + B\cdot rhs(SolDos)$

$$SolNoHom := y(t) = A\,e^{4t} + B\,t\,e^{4t} \quad (9)$$

> $with(linalg):$

> $WW := wronskian([rhs(SolUno), rhs(SolDos)], t)$

$$WW := \begin{bmatrix} e^{4t} & t\,e^{4t} \\ 4\,e^{4t} & e^{4t} + 4\,t\,e^{4t} \end{bmatrix} \quad (10)$$

> $BB := array([0, Q])$

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & 5\,e^{4t} \end{bmatrix} \quad (11)$$

> $SOL := linsolve(WW, BB) : Aprima := SOL_1; Bprima := SOL_2$

$$Aprima := -5\,t$$
$$Bprima := 5 \quad (12)$$

> $A := int(Aprima, t) + C_1; B := int(Bprima, t) + C_2$

$$A := -\frac{5}{2}\,t^2 + C_1$$
$$B := 5\,t + C_2 \quad (13)$$

> $SolNoHom$

$$y(t) = \left(-\frac{5}{2}\,t^2 + C_1\right) e^{4t} + \left(5\,t + C_2\right) t\,e^{4t} \quad (14)$$

> $Solucion := expand(SolNoHom)$

$$Solucion := y(t) = \frac{5}{2}\,\left(e^t\right)^4 t^2 + \left(e^t\right)^4 C_1 + t\left(e^t\right)^4 C_2 \quad (15)$$

>

Fin respuesta 1.a)

>

Respuesta 1.b)

> $Sistema := diff\left(y_1(t), t\right) = y_2(t), diff\left(y_2(t), t\right) = -16\cdot y_1(t) + 8\cdot y_2(t) + Q : Sistema_1; Sistema_2$

$$\frac{d}{dt}\,y_1(t) = y_2(t)$$
$$\frac{d}{dt}\,y_2(t) = -16\,y_1(t) + 8\,y_2(t) + 5\,e^{4t} \quad (16)$$

> $Condiciones := y_1(0) = -4, y_2(0) = 6$

$$Condiciones := y_1(0) = -4, y_2(0) = 6 \quad (17)$$

> $SolSol := dsolve(\{Sistema, Condiciones\}) :$

> $AA := array([[0, 1], [-16, 8]])$

$$AA := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & 8 \end{bmatrix} \quad (18)$$

> $Xcero := array([-4, 6])$

$$Xcero := \begin{bmatrix} -4 & 6 \end{bmatrix} \quad (19)$$

> $MatExp := exponential(AA, t)$

(20)

$$MatExp := \begin{bmatrix} e^{4t} - 4\,t\,e^{4t} & t\,e^{4t} \\ -16\,t\,e^{4t} & e^{4t} + 4\,t\,e^{4t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(20)}$$

> $SolHom := evalm(MatExp \,\&*\, Xcero);$

$$SolHom := \begin{bmatrix} -4\,e^{4t} + 22\,t\,e^{4t} & 88\,t\,e^{4t} + 6\,e^{4t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(21)}$$

> $BBB := array([0, Q])$

$$BBB := \begin{bmatrix} 0 & 5\,e^{4t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(22)}$$

> $MatExpTau := map(rcurry(eval, t='t - \text{tau}'), MatExp)$

$$MatExpTau := \begin{bmatrix} e^{4t-4\tau} - 4\,(t-\tau)\,e^{4t-4\tau} & (t-\tau)\,e^{4t-4\tau} \\ -16\,(t-\tau)\,e^{4t-4\tau} & e^{4t-4\tau} + 4\,(t-\tau)\,e^{4t-4\tau} \end{bmatrix} \quad \textbf{(23)}$$

> $BBBtau := map(rcurry(eval, t='\text{tau}'), BBB)$

$$BBBtau := \begin{bmatrix} 0 & 5\,e^{4\tau} \end{bmatrix} \quad \textbf{(24)}$$

> $ProdTau := evalm(MatExpTau \,\&*\, BBBtau)$

$$ProdTau := \begin{bmatrix} 5\,(t-\tau)\,e^{4t-4\tau}\,e^{4\tau} & 5\,\left(e^{4t-4\tau} + 4\,(t-\tau)\,e^{4t-4\tau}\right)\,e^{4\tau} \end{bmatrix} \quad \textbf{(25)}$$

> $IntProdTau := map(int, ProdTau, \text{tau} = 0..t)$

$$IntProdTau := \begin{bmatrix} \frac{5}{2}\,t^2\,e^{4t} & 5\,e^{4t}\,t\,(2\,t+1) \end{bmatrix} \quad \textbf{(26)}$$

> $SolucionFinal := evalm(SolHom + IntProdTau) : yy_1(t) = simplify(SolucionFinal_1); yy_2(t) = simplify(SolucionFinal_2)$

$$yy_1(t) = \frac{1}{2}\,e^{4t}\,(-8 + 44\,t + 5\,t^2)$$

$$yy_2(t) = e^{4t}\,(6 + 93\,t + 10\,t^2) \quad \textbf{(27)}$$

> $SolSol_1; SolSol_2$

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\,e^{4t}\,(-8 + 44\,t + 5\,t^2)$$

$$y_2(t) = e^{4t}\,(6 + 93\,t + 10\,t^2) \quad \textbf{(28)}$$

>

Fin respuesta 1.b)

>

2) (20/100)
DADA LA SIGUIENTE SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DESCONOCIDA

> $y(x) = \_C1\,e^{-2x}\cos(3\,x) + \_C2\,e^{-2x}\sin(3\,x) + \cos(3\,x) + 5\sin(3\,x)$

$$y(x) = \_C1\,e^{-2x}\cos(3\,x) + \_C2\,e^{-2x}\sin(3\,x) + \cos(3\,x) + 5\sin(3\,x) \quad \textbf{(29)}$$

a) OBTENGA LA SOLUCIÓN PARTICULAR DADAS LAS CONDICIONES FRONTERA SIGUIENTES **(5 puntos)**

> $y(0)=3;y\left(\frac{1}{2}\pi\right)=3$

$$y(0)=3$$
$$y\left(\frac{1}{2}\pi\right)=3 \qquad (30)$$

b) GRAFIQUE LA SOLUCION PARTICULAR OBTENIDA EN EL INCISO a) PARA EL DADO INTERVALO CON LAS CONDICIONES DE FRONTERA DEL MISMO INCISO. **(5 puntos)**

c) OBTENGA SU ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL CORRESPONDIENTE Y **CLASIFÍQUELA** (por tipo de coeficientes y tipo de homogeneidad).
(10 puntos)

> *restart*

Respuesta 2.a)

> $SolGral := y(x) = \_C1\, e^{-2x}\cos(3x) + \_C2\, e^{-2x}\sin(3x) + \cos(3x) + 5\sin(3x)$

$$SolGral := y(x) = \_C1\, e^{-2x}\cos(3x) + \_C2\, e^{-2x}\sin(3x) + \cos(3x) + 5\sin(3x) \qquad (31)$$

> $Cond := y(0)=3, y\left(\frac{1}{2}\pi\right)=3$

$$Cond := y(0)=3, y\left(\frac{1}{2}\pi\right)=3 \qquad (32)$$

> $Sistema := subs\left(x=0, rhs(SolGral)=rhs(Cond_1)\right), subs\left(x=\frac{Pi}{2}, rhs(SolGral)=rhs(Cond_2)\right) : Sistema_1; Sistema_2$

$$\_C1+1=3$$
$$-5-\_C2\, e^{-\pi}=3 \qquad (33)$$

> $Parametro := solve(\{Sistema\})$

$$Parametro := \left\{\_C1=2, \_C2=-\frac{8}{e^{-\pi}}\right\} \qquad (34)$$

> $SolPart := simplify\left(subs\left(\_C1=rhs(Parametro_1), \_C2=rhs(Parametro_2), SolGral\right)\right)$

$$SolPart := y(x) = 2\, e^{-2x}\cos(3x) - 8\, e^{-2x+\pi}\sin(3x) + \cos(3x) + 5\sin(3x) \qquad (35)$$

>

Fin respuesta 2.a)

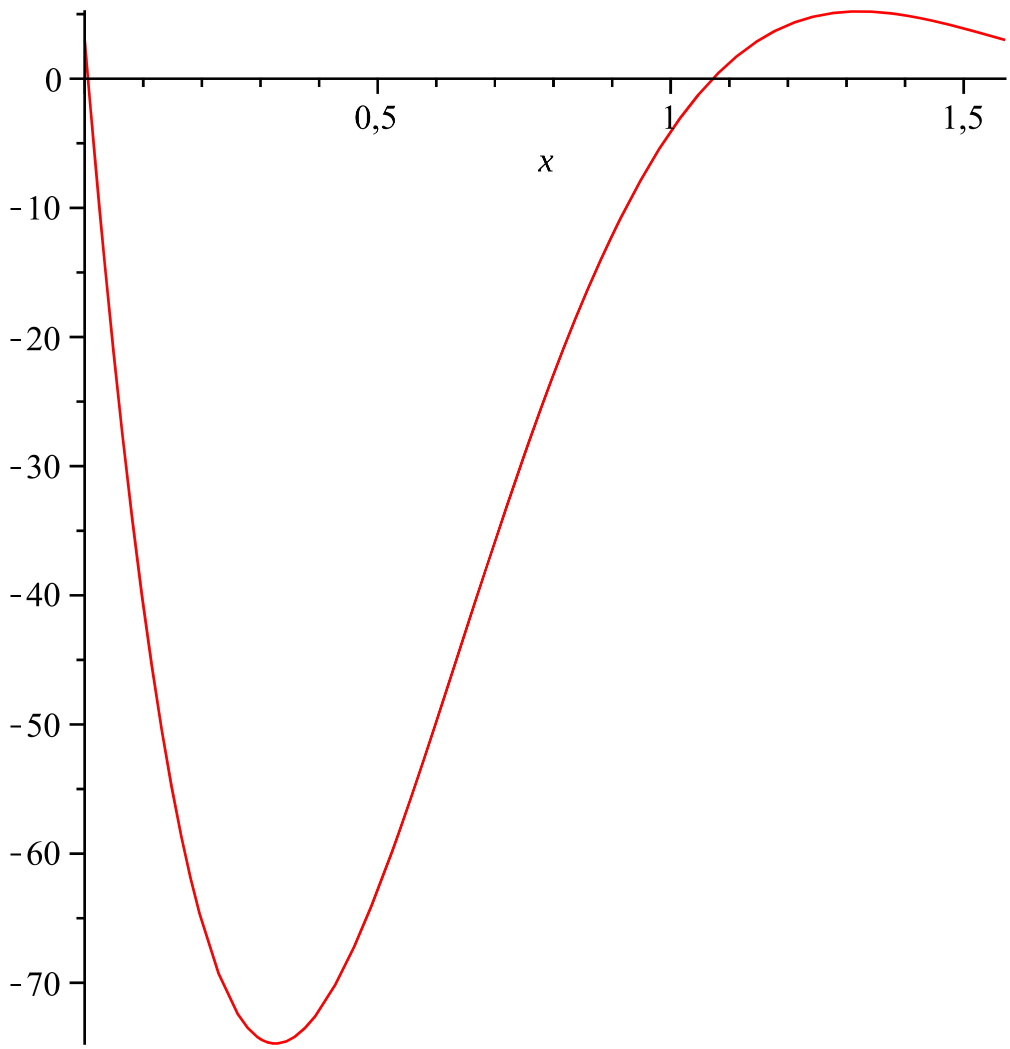
>

Respuesta 2.b)

> $with(plots):$

>

> $plot\left(rhs(SolPart), x=0..\frac{Pi}{2},\right)$



>

Fin respuesta 2.b)

>

Respuesta 2.c)

> *SolGral*

$$y(x) = \_C1\, e^{-2x} \cos(3x) + \_C2\, e^{-2x} \sin(3x) + \cos(3x) + 5 \sin(3x) \quad \textbf{(36)}$$

> $SolHom := y(x) = \_C1\, e^{-2x} \cos(3x) + \_C2\, e^{-2x} \sin(3x)$

$$SolHom := y(x) = \_C1\, e^{-2x} \cos(3x) + \_C2\, e^{-2x} \sin(3x) \quad \textbf{(37)}$$

> $SolPart := y(x) = \cos(3x) + 5 \sin(3x)$

$$SolPart := y(x) = \cos(3x) + 5 \sin(3x) \quad \textbf{(38)}$$

> $EcuaCarac := expand((m - (-2 + 3 \cdot I)) \cdot (m - (-2 - 3 \cdot I))) = 0$

$$EcuaCarac := m^2 + 4m + 13 = 0 \quad \textbf{(39)}$$

> $EcuaHom := diff(y(x), x\$2) + 4 \cdot diff(y(x), x) + 13 \cdot y(x) = 0$

$$EcuaHom := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 4 \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 13\, y(x) = 0 \quad \textbf{(40)}$$

> $Q := eval(subs(y(x) = rhs(SolPart), lhs(EcuaHom)))$

$$Q := 64 \cos(3x) + 8 \sin(3x) \quad \textbf{(41)}$$

> $EcuacionFinal := lhs(EcuaHom) = Q$

$$EcuacionFinal := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + 4\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + 13\, y(x) = 64\cos(3\,x) + 8\sin(3\,x) \quad \mathbf{(42)}$$

>

Clasificación: E.D.O.(2).L.cc.N-H

>

> $SolOriginal := dsolve(EcuacionFinal)$

$$SolOriginal := y(x) = \_C1\, e^{-2\,x}\cos(3\,x) + \_C2\, e^{-2\,x}\sin(3\,x) + \cos(3\,x) + 5\sin(3\,x) \quad \mathbf{(43)}$$

> $SolGral$

$$y(x) = \_C1\, e^{-2\,x}\cos(3\,x) + \_C2\, e^{-2\,x}\sin(3\,x) + \cos(3\,x) + 5\sin(3\,x) \quad \mathbf{(44)}$$

>

Fin respuesta 2.c)

>

3) (20/100)

OBTENER LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN LINEAL DE **COEFICIENTES VARIABLES** Y NO HOMOGÉNEA **(SIN UTILIZAR dsolve)**

> $\frac{d}{dt}\, x(t) + x(t)\cos(t) = \sin(t)\cos(t)$

$$\frac{d}{dt}\, x(t) + x(t)\cos(t) = \sin(t)\cos(t) \quad \mathbf{(45)}$$

> $restart$

Respuesta 3)

> $Ecua := \frac{d}{dt}\, x(t) + x(t)\cos(t) = \sin(t)\cos(t)$

$$Ecua := \frac{d}{dt}\, x(t) + x(t)\cos(t) = \sin(t)\cos(t) \quad \mathbf{(46)}$$

> $p := \cos(t);\ q := rhs(Ecua)$

$$p := \cos(t)$$

$$q := \sin(t)\cos(t) \quad \mathbf{(47)}$$

> $SolGral := x(t) = expand\big(C_1 \cdot \exp(-int(p, t)) + \exp(-int(p, t)) \cdot int(\exp(int(p, t)) \cdot q, t)\big)$

$$SolGral := x(t) = \frac{C_1}{e^{\sin(t)}} + \sin(t) - 1 \quad \mathbf{(48)}$$

> $SolSol := dsolve(Ecua)$

$$SolSol := x(t) = \sin(t) - 1 + e^{-\sin(t)}\, \_C1 \quad \mathbf{(49)}$$

>

Fin respuesta 3)

>

4) (20/100)

OBTENER LA MATRIZ **A** DE COEFICIENTES CONSTNATES CUYA MATRIZ EXPONENCIAL ESTÁ DADA POR LA SIGUIENTE EXPRESIÓN

$$> \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \end{bmatrix} e^{4t}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{16} + \frac{1}{4} t + \frac{3}{16} e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{4t} & -\frac{5}{16} - \frac{1}{4} t + \frac{5}{16} e^{4t} \\ -\frac{3}{8} - \frac{1}{2} t + \frac{3}{8} e^{4t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{4t} & -\frac{5}{8} + \frac{1}{2} t + \frac{5}{8} e^{4t} \\ -\frac{3}{16} + \frac{1}{4} t + \frac{3}{16} e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{4t} & \frac{11}{16} - \frac{1}{4} t + \frac{5}{16} e^{4t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(50)}$$

> *restart*

Respuesta 4)

$$> MatrizExponencial := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} + \frac{1}{4} t + \frac{3}{16} e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{4t} & -\frac{5}{16} - \frac{1}{4} t + \frac{5}{16} e^{4t} \\ -\frac{3}{8} - \frac{1}{2} t + \frac{3}{8} e^{4t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{4t} & -\frac{5}{8} + \frac{1}{2} t + \frac{5}{8} e^{4t} \\ -\frac{3}{16} + \frac{1}{4} t + \frac{3}{16} e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{4t} & \frac{11}{16} - \frac{1}{4} t + \frac{5}{16} e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$MatrizExponencial := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} + \frac{1}{4} t + \frac{3}{16} e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{4t} & -\frac{5}{16} - \frac{1}{4} t + \frac{5}{16} e^{4t} \\ -\frac{3}{8} - \frac{1}{2} t + \frac{3}{8} e^{4t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{4t} & -\frac{5}{8} + \frac{1}{2} t + \frac{5}{8} e^{4t} \\ -\frac{3}{16} + \frac{1}{4} t + \frac{3}{16} e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{4t} & \frac{11}{16} - \frac{1}{4} t + \frac{5}{16} e^{4t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(51)}$$

$$> DerMatExp := map(diff, MatrizExponencial, t)$$

$$DerMatExp := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{4t} & e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} e^{4t} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{4t} & 2\, e^{4t} & \frac{1}{2} + \frac{5}{2} e^{4t} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{4t} & e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} e^{4t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(52)}$$

$$> AA := evalm(map(rcurry(eval, t='0'), DerMatExp))$$

$$AA := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(53)}$$

>

Fin respuesta 4)

>

5) (20/100)
a) OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SIGUIENTE SISTEMA CON LAS CONDICIONES: x(0) = 1 y(0) = - 1 z(0) = 0 **(15 puntos)**

> $\frac{d}{dt}x(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{3t}$; $\frac{d}{dt}y(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{2t}$; $\frac{d}{dt}z(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{t}$

$$\frac{d}{dt}x(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{3t}$$
$$\frac{d}{dt}y(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{2t}$$
$$\frac{d}{dt}z(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{t} \quad \textbf{(54)}$$

b) GRAFICAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA EN EL INCISO **a)** EN EL INTERVALO 0 < t < 1 **(5 puntos)**

> *restart*

Respuesta 5.a)

> $Sistema := \frac{d}{dt}x(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{3t}, \frac{d}{dt}y(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{2t}, \frac{d}{dt}z(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{t} : Sistema_1; Sistema_2; Sistema_3$

$$\frac{d}{dt}x(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{3t}$$
$$\frac{d}{dt}y(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{2t}$$
$$\frac{d}{dt}z(t)=x(t)+y(t)+z(t)+e^{t} \quad \textbf{(55)}$$

> $Condiciones := x(0)=1, y(0)=-1, z(0)=0$

$$Condiciones := x(0)=1, y(0)=-1, z(0)=0 \quad \textbf{(56)}$$

> $Solucion := dsolve(\{Sistema, Condiciones\}) : Solucion_1; Solucion_2; Solucion_3$

$$x(t)=-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{3}e^{3t}t+\frac{13}{18}e^{3t}+\frac{23}{18}$$
$$y(t)=-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{3}e^{3t}t+\frac{7}{18}e^{3t}-\frac{8}{9}$$
$$z(t)=-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}t+\frac{7}{18}e^{3t}-\frac{7}{18}+\frac{1}{2}e^{t} \quad \textbf{(57)}$$

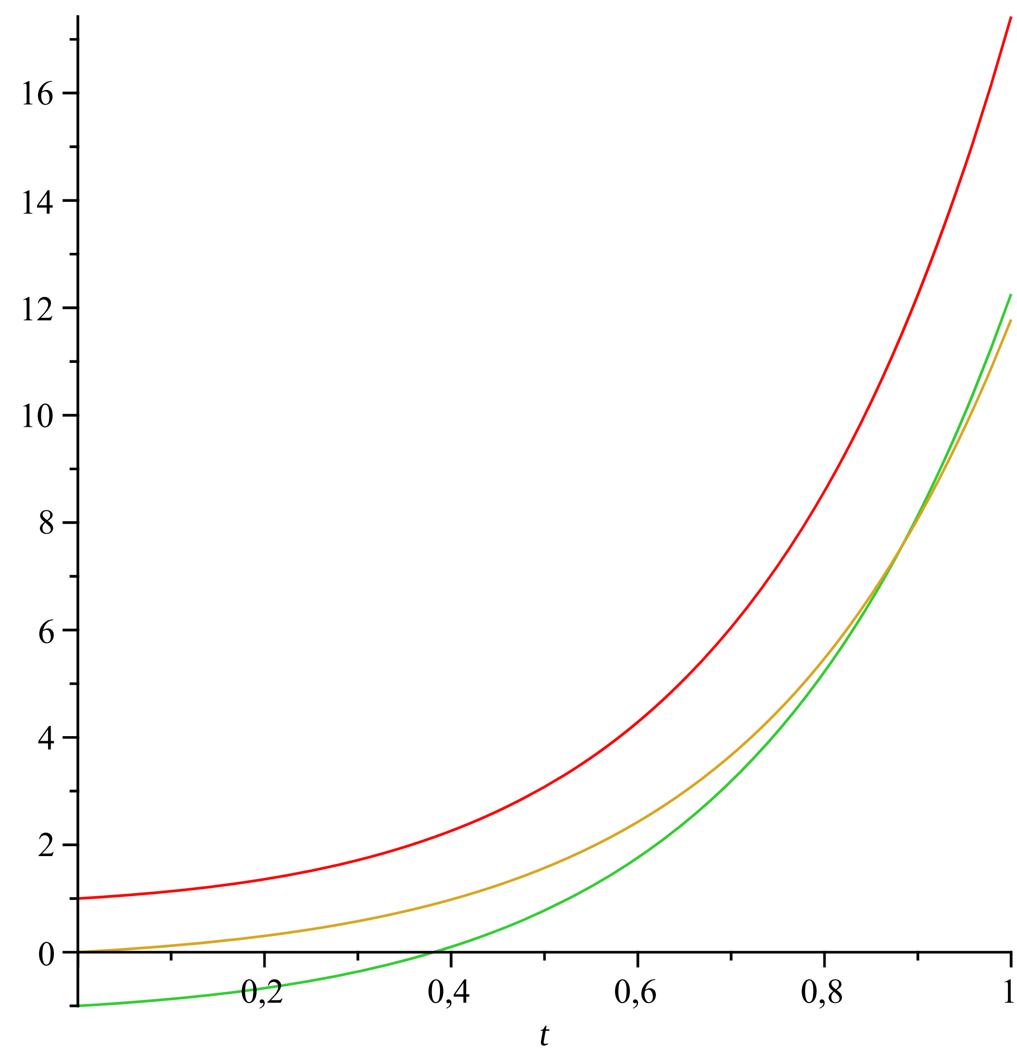
>

Fin respuesta 5.a)

>

Respuesta 5.b)

> $plot([rhs(Solucion_1), rhs(Solucion_2), rhs(Solucion_3)], t=0..1)$



>

Fin respuesta 5.b)

>

>

FIN DEL EXAMEN

>

>