

SOLUCION

FACULTAD DE INGENIERÍA
 ECUACIONES DIFERENCIALES
 SEMESTRE 2015-1
 SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

OCTUBRE 20 DE 2014

> *restart***1) (25/100 puntos)****a) OBTENER LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA SIGUIENTES ECUACIÓN DIFERENCIAL (sin usar dsolve)****(10 puntos)****>**

$$\text{Ecuacion} := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 6 y(t) = e^{-2t} \quad (1)$$

b) CONVERTIR LA ECUACIÓN DEL INCISO a) EN UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y RESOLVERLO PARA LAS CONDICIONES (10 puntos)**>**

$$\text{Condiciones} := y_1(0) = 2, y_2(0) = -2 \quad (2)$$

c) GRAFICAR AMBAS FUNCIONES DE LA SOLUCIÓN PARTICULAR OBTENIDA EN b) PARA UN INTERVALO $0 < t < 1$ **(5 puntos)****>** *restart***Respuesta 1a)**

$$\text{Ecuacion} := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 6 y(t) = e^{-2t}$$

$$\text{Ecuacion} := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 6 y(t) = e^{-2t} \quad (3)$$

$$\text{EcuacionHom} := \text{lhs}(\text{Ecuacion}) = 0$$

$$\text{EcuacionHom} := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 6 y(t) = 0 \quad (4)$$

$$Q := \text{rhs}(\text{Ecuacion})$$

$$Q := e^{-2t} \quad (5)$$

$$\text{EcuacionCarac} := m \cdot 2 + 5 \cdot m + 6 = 0$$

$$\text{EcuacionCarac} := m^2 + 5m + 6 = 0 \quad (6)$$

$$\text{Raiz} := \text{solve}(\text{EcuacionCarac})$$

$$\text{Raiz} := -2, -3 \quad (7)$$

$$\text{SolUno} := y(t) = \exp(\text{Raiz}_1 \cdot t); \text{SolDos} := y(t) = \exp(\text{Raiz}_2 \cdot t)$$

$$\text{SolUno} := y(t) = e^{-2t}$$

$$\text{SolDos} := y(t) = e^{-3t} \quad (8)$$

$$\text{SolHom} := y(t) = C_1 \cdot \text{rhs}(\text{SolUno}) + C_2 \cdot \text{rhs}(\text{SolDos})$$

$$\text{SolHom} := y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \quad (9)$$

$$\text{SolNoHom} := y(t) = A \cdot \text{rhs}(\text{SolUno}) + B \cdot \text{rhs}(\text{SolDos})$$

$$SolNoHom := y(t) = A e^{-2t} + B e^{-3t} \quad (10)$$

> with(linalg) :

> WW := wronskian([rhs(SolUno), rhs(SolDos)], t)

$$WW := \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{bmatrix} \quad (11)$$

> BB := array([0, Q])

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (12)$$

> SOL := simplify(linsolve(WW, BB)) : Aprima := SOL₁; Bprima := SOL₂

$$Aprima := 1$$

$$Bprima := -e^t \quad (13)$$

> A := int(Aprima, t) + C₁; B := int(Bprima, t) + C₂

$$A := t + C_1$$

$$B := -e^t + C_2 \quad (14)$$

> SolucionGeneral := simplify(SolNoHom)

$$SolucionGeneral := y(t) = e^{-2t} t + C_1 e^{-2t} - e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \quad (15)$$

>

fin respuesta 1a)

>

respuesta 1b)

> Condiciones := y₁(0) = 2, y₂(0) = -2

$$Condiciones := y_1(0) = 2, y_2(0) = -2 \quad (16)$$

> Sistema := diff(y₁(t), t) = y₂(t), diff(y₂(t), t) = -6·y₁(t) - 5·y₂(t) + exp(-2t) : Sistema₁;
Sistema₂

$$\frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} y_2(t) = -6y_1(t) - 5y_2(t) + e^{-2t} \quad (17)$$

> Solucion := dsolve({Sistema, Condiciones}) : Solucion₁; Solucion₂

$$y_1(t) = 3e^{-2t} - e^{-3t} + e^{-2t} t$$

$$y_2(t) = -5e^{-2t} + 3e^{-3t} - 2e^{-2t} t \quad (18)$$

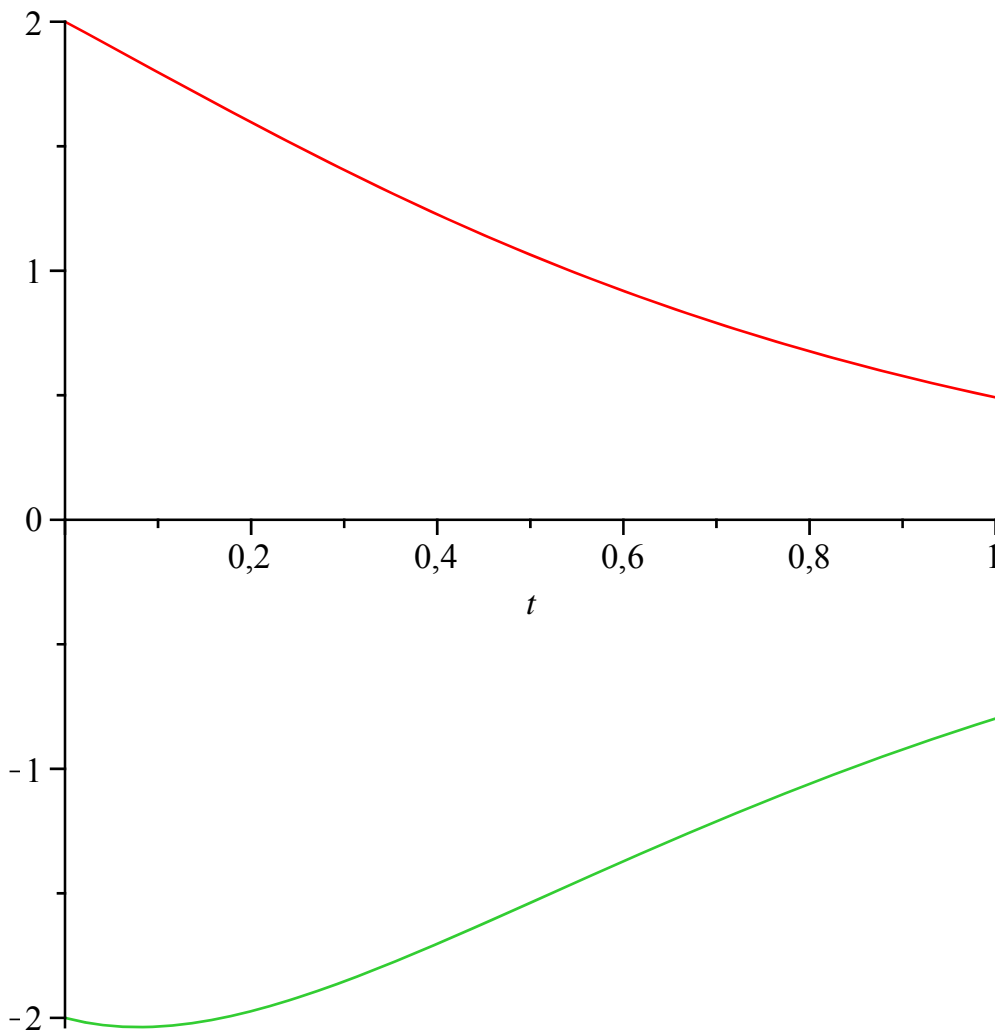
>

fin respuesta 1b)

>

respuesta 1c)

> plot([rhs(Solucion₁), rhs(Solucion₂)], t=0..1)



>

fin respuesta 1c)

> restart

2) (35/100 puntos) DÉ LA CLASIFICACIÓN (ordinaria o derivadas parciales, orden, grado, lineal o no lineal)

DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL CON SU SOLUCIÓN GENERAL: **(7 puntos)**

$$\text{Ecuacion} := \left(\frac{d}{dx} y(x) \right)^3 - 4 x y(x) \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 8 y(x)^2 = 0$$

$$\text{SolucionGeneral} := y(x) = \frac{x^2}{C_1} - \frac{2x}{C_1^2} + \frac{1}{C_1^3} \quad (19)$$

E INDIQUE CUÁLES DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES SON SOLUCIÓN Y DE QUÉ TIPO (particular o singular) Y CUÁLES NO LO SON, ARGUMENTANDO CADA RESULTADO **(4 puntos cada respuesta correcta menos 2 puntos menos cada respuesta incorrecta)**

$$\text{funcion}_1 := y(x) = 8 x^2 + 128 x + 512$$

$$\text{funcion}_2 := y(x) = 8 x^2 - 128 x + 512$$

$$\text{funcion}_3 := y(x) = -4 x^2 - 32 x - 64$$

$$\text{funcion}_4 := y(x) = 4x^2 + 32x + 64$$

$$\text{funcion}_5 := y(x) = \frac{27}{4}x^3$$

$$\text{funcion}_6 := y(x) = -\frac{4}{27}x^3$$

$$\text{funcion}_7 := y(x) = \frac{4}{27}x^3 \quad (20)$$

> restart

respuesta 2a) EDO(1)NL(GRADO=3)

$$\begin{aligned} > \text{Ecuacion} := \left(\frac{d}{dx} y(x) \right)^3 - 4xy(x) \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 8y(x)^2 = 0; \text{SolucionGeneral} := y(x) \\ &= \frac{x^2}{C_1} - \frac{2x}{C_1^2} + \frac{1}{C_1^3} \end{aligned}$$

$$\text{Ecuacion} := \left(\frac{d}{dx} y(x) \right)^3 - 4xy(x) \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 8y(x)^2 = 0$$

$$\text{SolucionGeneral} := y(x) = \frac{x^2}{C_1} - \frac{2x}{C_1^2} + \frac{1}{C_1^3} \quad (21)$$

$$> \text{Comprobacion}_0 := \text{simplify}(\text{eval}(\text{subs}(y(x) = \text{rhs}(\text{SolucionGeneral}), \text{Ecuacion})))$$

$$\text{Comprobacion}_0 := 0 = 0 \quad (22)$$

fin respuesta 2a)

$$> \text{funcion}_1 := y(x) = 8x^2 + 128x + 512$$

$$\text{funcion}_1 := y(x) = 8x^2 + 128x + 512 \quad (23)$$

$$> \text{Comprobacion}_1 := \text{simplify}(\text{eval}(\text{subs}(y(x) = \text{rhs}(\text{funcion}_1), \text{Ecuacion})))$$

$$\text{Comprobacion}_1 := 8192x^3 + 196608x^2 + 1572864x + 4194304 = 0 \quad (24)$$

funcion₁ no es solución

$$> \text{funcion}_2 := y(x) = 8x^2 - 128x + 512$$

$$\text{funcion}_2 := y(x) = 8x^2 - 128x + 512 \quad (25)$$

$$> \text{Comprobacion}_2 := \text{simplify}(\text{eval}(\text{subs}(y(x) = \text{rhs}(\text{funcion}_2), \text{Ecuacion})))$$

$$\text{Comprobacion}_2 := 0 = 0 \quad (26)$$

$$> \text{Comprobacion}_{21} := \text{simplify}(\text{solve}(\text{rhs}(\text{funcion}_2) = \text{rhs}(\text{SolucionGeneral}), C_1))$$

$$\text{Comprobacion}_{21} := \frac{1}{8} \quad (27)$$

funcion₂ es una solución particular

$$> \text{funcion}_3 := y(x) = -4x^2 - 32x - 64$$

$$\text{funcion}_3 := y(x) = -4x^2 - 32x - 64 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} > \text{Comprobacion}_3 := \text{simplify}(\text{eval}(\text{subs}(y(x) = \text{rhs}(\text{funcion}_3), \text{Ecuacion}))) \\ \text{Comprobacion}_3 := 0 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} > \text{Comprobacion}_{31} := \text{simplify}(\text{solve}(\text{rhs}(\text{funcion}_3) = \text{rhs}(\text{SolucionGeneral}), C_1)) \\ \text{Comprobacion}_{31} := -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (30)$$

funcion₃ es una solución particular

$$\begin{aligned} > \text{funcion}_4 := y(x) = 4x^2 + 32x + 64 \\ \text{funcion}_4 := y(x) = 4x^2 + 32x + 64 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} > \text{Comprobacion}_4 := \text{simplify}(\text{eval}(\text{subs}(y(x) = \text{rhs}(\text{funcion}_4), \text{Ecuacion}))) \\ \text{Comprobacion}_4 := 1024x^3 + 12288x^2 + 49152x + 65536 = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

funcion₄ no es solución

$$\begin{aligned} > \text{funcion}_5 := y(x) = \frac{27}{4}x^3 \\ \text{funcion}_5 := y(x) = \frac{27}{4}x^3 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} > \text{Comprobacion}_5 := \text{simplify}(\text{eval}(\text{subs}(y(x) = \text{rhs}(\text{funcion}_5), \text{Ecuacion}))) \\ \text{Comprobacion}_5 := \frac{519777}{64}x^6 = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

funcion₅ no es solución

$$\begin{aligned} > \text{funcion}_6 := y(x) = -\frac{4}{27}x^3 \\ \text{funcion}_6 := y(x) = -\frac{4}{27}x^3 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} > \text{Comprobacion}_6 := \text{simplify}(\text{eval}(\text{subs}(y(x) = \text{rhs}(\text{funcion}_6), \text{Ecuacion}))) \\ \text{Comprobacion}_6 := -\frac{128}{729}x^6 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

funcion₆ no es solución

$$\begin{aligned} > \text{funcion}_7 := y(x) = \frac{4}{27}x^3 \\ \text{funcion}_7 := y(x) = \frac{4}{27}x^3 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} > \text{Comprobacion}_7 := \text{simplify}(\text{eval}(\text{subs}(y(x) = \text{rhs}(\text{funcion}_7), \text{Ecuacion}))) \\ \text{Comprobacion}_7 := 0 = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} > \text{Comprobacion}_{71} := \text{solve}(\text{rhs}(\text{funcion}_7) = \text{rhs}(\text{SolucionGeneral}), C_1) \\ \text{Comprobacion}_{71} := \frac{3}{4x}, \frac{3}{x}, \frac{3}{x} \end{aligned} \quad (39)$$

funcion₇ es una solución singular

>

fin respuesta 2b)

```
>  
=>  
>  
=>
```

restart

3) (20/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL NO LINEAL (sin usar dsolve o relativos)

$$1 - x^2 y(x) + x^2 (y(x) - x) \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) = 0 \quad (40)$$

```
>  
=>  
>  
=>
```

respuesta 3)

```
> Ecuacion := 1 - x^2 y(x) + x^2 (y(x) - x) ( d/dx y(x) ) = 0
```

$$Ecuacion := 1 - x^2 y(x) + x^2 (y(x) - x) \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) = 0 \quad (41)$$

```
> with(DEtools) :
```

```
> odeadvisor(Ecuacion)
```

```
[_rational, [_1st_order, _with_symmetry_[F(x),G(x)]], [_Abel, 2nd type, class B]] (42)
```

```
> FactInt := intfactor(Ecuacion)
```

$$FactInt := \frac{1}{x^2} \quad (43)$$

```
> M := 1 - x^2 y; N := x^2 (y - x)
```

$$\begin{aligned} M &:= 1 - x^2 y \\ N &:= x^2 (y - x) \end{aligned} \quad (44)$$

```
> Comprobacion_1 := simplify(diff(M, y) - diff(N, x)) = 0
```

$$Comprobacion_1 := 2 x (-y + x) = 0 \quad (45)$$

```
> MM := expand(FactInt * M); NN := simplify(FactInt * N)
```

$$\begin{aligned} MM &:= \frac{1}{x^2} - y \\ NN &:= y - x \end{aligned} \quad (46)$$

```
> Comprobacion_2 := simplify(diff(MM, y) - diff(NN, x)) = 0
```

$$Comprobacion_2 := 0 = 0 \quad (47)$$

```
> IntMMx := int(MM, x)
```

$$IntMMx := -\frac{1}{x} - y x \quad (48)$$

```
> SolucionGeneral := IntMMx + int((NN - diff(IntMMx, y)), y) = C_1
```

$$SolucionGeneral := -\frac{1}{x} - y x + \frac{1}{2} y^2 = C_1 \quad (49)$$

```
fin respuesta 3)
```

```
> restart
```

4) (20/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL NO LINEAL (sin usar dsolve o relativos)

$$(1 + y(x)^2) \left(e^{2x} - e^{y(x)} \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) \right) - (1 + y(x)) \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) = 0 \quad (50)$$

> restart

respuesta 4)

> Ecuacion := (1 + y(x)^2) (e^{2x} - e^{y(x)} (d/dx y(x))) - (1 + y(x)) (d/dx y(x)) = 0

$$Ecuacion := (1 + y(x)^2) \left(e^{2x} - e^{y(x)} \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) \right) - (1 + y(x)) \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) = 0 \quad (51)$$

> with(DEtools) :

> odeadvisor(Ecuacion)

[_separable] (52)

> DerEcu := isolate(Ecuacion, diff(y(x), x))

$$DerEcu := \frac{d}{dx} y(x) = \frac{-e^{2x} - y(x)^2 e^{2x}}{-e^{y(x)} - y(x)^2 e^{y(x)} - 1 - y(x)} \quad (53)$$

> M := factor(-(-e^{2x} - y^2 e^{2x}))

$$M := e^{2x} (1 + y^2) \quad (54)$$

> N := -e^y - y^2 e^y - 1 - y

$$N := -e^y - e^y y^2 - 1 - y \quad (55)$$

> P := exp(2 x); Q := 1 + y·2; R := 1; S := -e^y - e^y y^2 - 1 - y

$$P := e^{2x}$$

$$Q := 1 + y^2$$

$$R := 1$$

$$S := -e^y - e^y y^2 - 1 - y \quad (56)$$

> SolGral := int(P/R, x) + int(S/Q, y) = C1

$$SolGral := \frac{1}{2} e^{2x} - e^y - \arctan(y) - \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = C_1 \quad (57)$$

fin respuesta 4)

> restart

FIN DEL EXAMEN