FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
TERCER EXAMEN PARCIAL
SEMESTRE 2015-1

2014 NOVIEMBRE 14

> *restart*

1) UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE TRANSFORMADA DE LAPLACE (**sin usar dsolve**):

a) **(15/100 puntos)** OBTENER LA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN DADA CON LAS CONDICIONES INICIALES DADAS

b) **(15/100 puntos)** GRAFICAR -JUNTAS- LA SOLUCIÓN OBTENIDA EN EL INCISO a) Y SU PRIMERA DERIVADA PARA UN INTERVALO DE $0 < t < 1$

>

$$\frac{d^2}{dt^2}\,y(t) + 6\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right) + 9\,y(t) = 27\,\mathrm{Heaviside}(t-4)\,\sin(3\,t-12)$$

$$y(0) = 1$$

$$\mathrm{D}(y)(0) = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

>

respuesta 1a)

> $Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2}\,y(t) + 6\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right) + 9\,y(t) = 27\,\mathrm{Heaviside}(t-4)\,\sin(3\,t-12)$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2}\,y(t) + 6\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right) + 9\,y(t) = 27\,\mathrm{Heaviside}(t-4)\,\sin(3\,t-12) \qquad \textbf{(2)}$$

> $Condiciones := y(0) = 1, \mathrm{D}(y)(0) = 1$

$$Condiciones := y(0) = 1, \mathrm{D}(y)(0) = 1 \qquad \textbf{(3)}$$

> *with*(*inttrans*) :

> $TransLapEcua := subs(Condiciones, laplace(Ecuacion, t, s))$

$$TransLapEcua := s^2\,laplace(y(t), t, s) - 7 - s + 6\,s\,laplace(y(t), t, s) + 9\,laplace(y(t), t, s) = \frac{81\,e^{-4\,s}}{s^2+9} \qquad \textbf{(4)}$$

> $TransLapSol := simplify(isolate(TransLapEcua, laplace(y(t), t, s)))$

$$TransLapSol := laplace(y(t), t, s) = \frac{81\,e^{-4\,s} + 7\,s^2 + 63 + s^3 + 9\,s}{(s^2+9)\,(s^2+6\,s+9)} \qquad \textbf{(5)}$$

> $Solucion := invlaplace(TransLapSol, s, t)$

$$Solucion := y(t) = e^{-3\,t}\,(1+4\,t) + \frac{3}{2}\left(-\cos(3\,t-12) + e^{-3\,t+12}\,(-11+3\,t)\right)\mathrm{Heaviside}(t-4) \qquad \textbf{(6)}$$

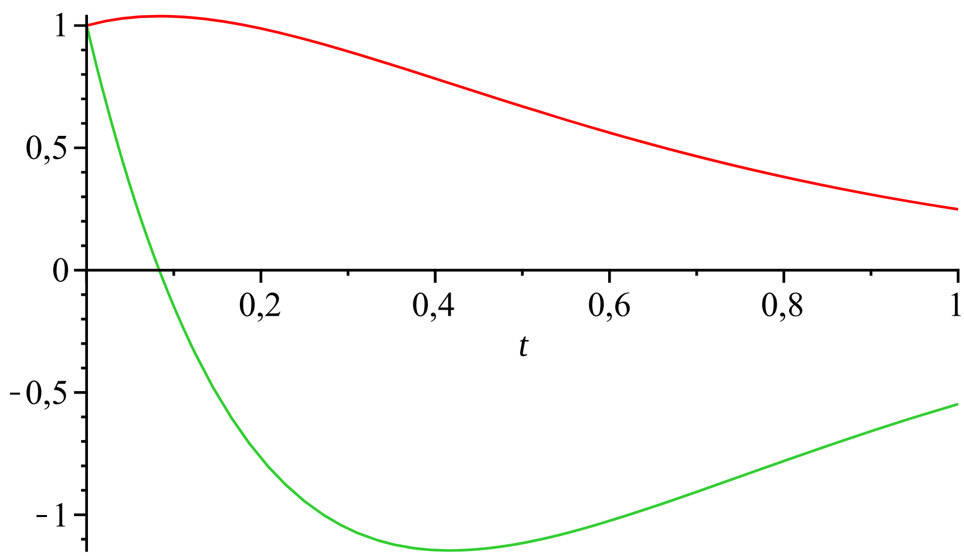
>

fin respuesta 1a)

>

respuesta 1b)

> $plot([rhs(Solucion), rhs(diff(Solucion, t))], t = 0..1)$



\>

fin respuesta 1b)

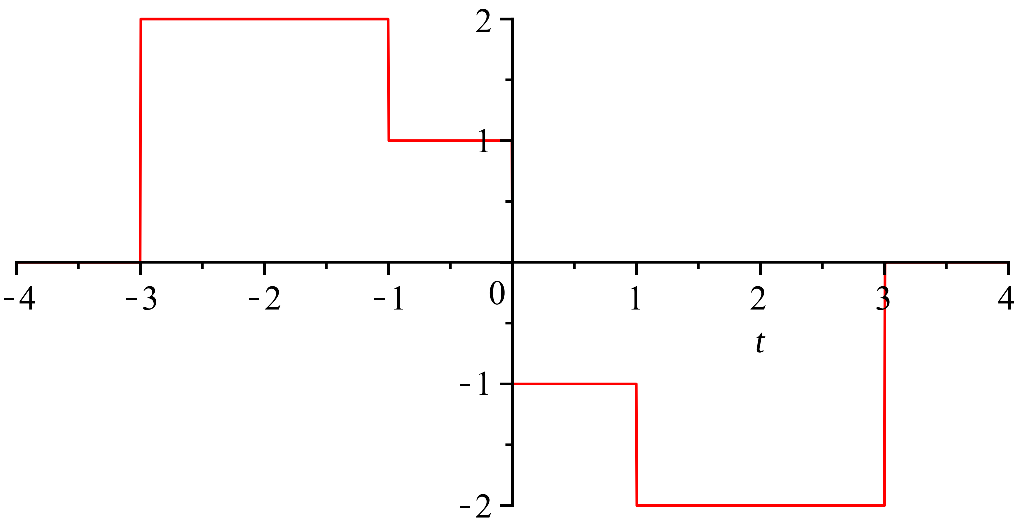
\> *restart*

2) DE LA FUNCIÓN DIBUJADA:

a) **(15/100 puntos)** OBTENER SU TRANSFORMADA DE LAPLACE

b) **(25/100 puntos)** GRAFICAR - <u>JUNTAS</u> - EN EL INTERVALO 1.9 < x < 2.1 A LA FUNCION Y SU SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER OBTENIDA CALCULANDO SUS PRIMEROS 500 TÉRMINOS

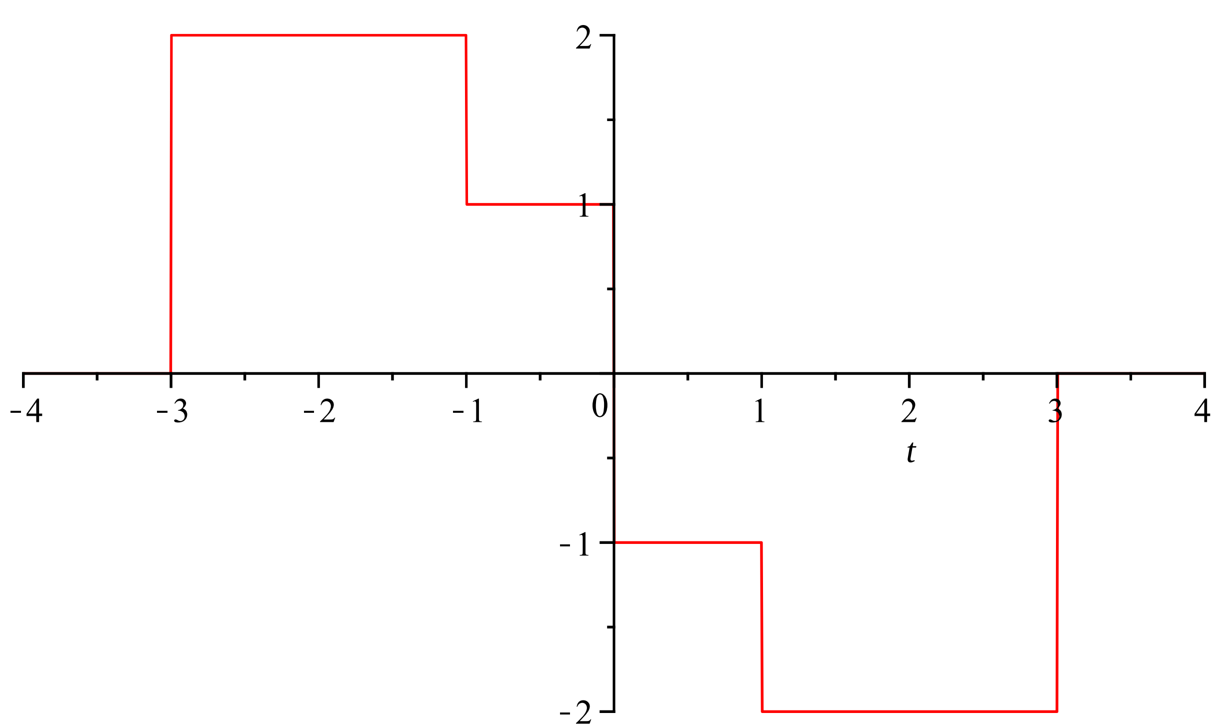
\>



\>

respuesta 2a)

\> $f := 2\cdot\text{Heaviside}(t+3) - \text{Heaviside}(t+1) - 2\cdot\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t-1) + 2\cdot\text{Heaviside}(t-3)$: $plot(f, t=-4..4)$



> $with(inttrans):$

> $F := laplace(f, t, s)$

$$F := -\frac{1+e^{-s}-2\,e^{-3\,s}}{s} \qquad (7)$$

>

fin respuesta 2a)

>

respuesta 2b)

> $L := 4$

$$L := 4 \qquad (8)$$

> $a_0 := \left(\frac{1}{L}\right)\cdot int(f, t=-L..L);\ c := \frac{a_0}{2}$

$$a_0 := 0$$

$$c := 0 \qquad (9)$$

> $a_n := \left(\frac{1}{L}\right)\cdot int\left(f\cdot\cos\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{L}\right), t=-L..L\right)$

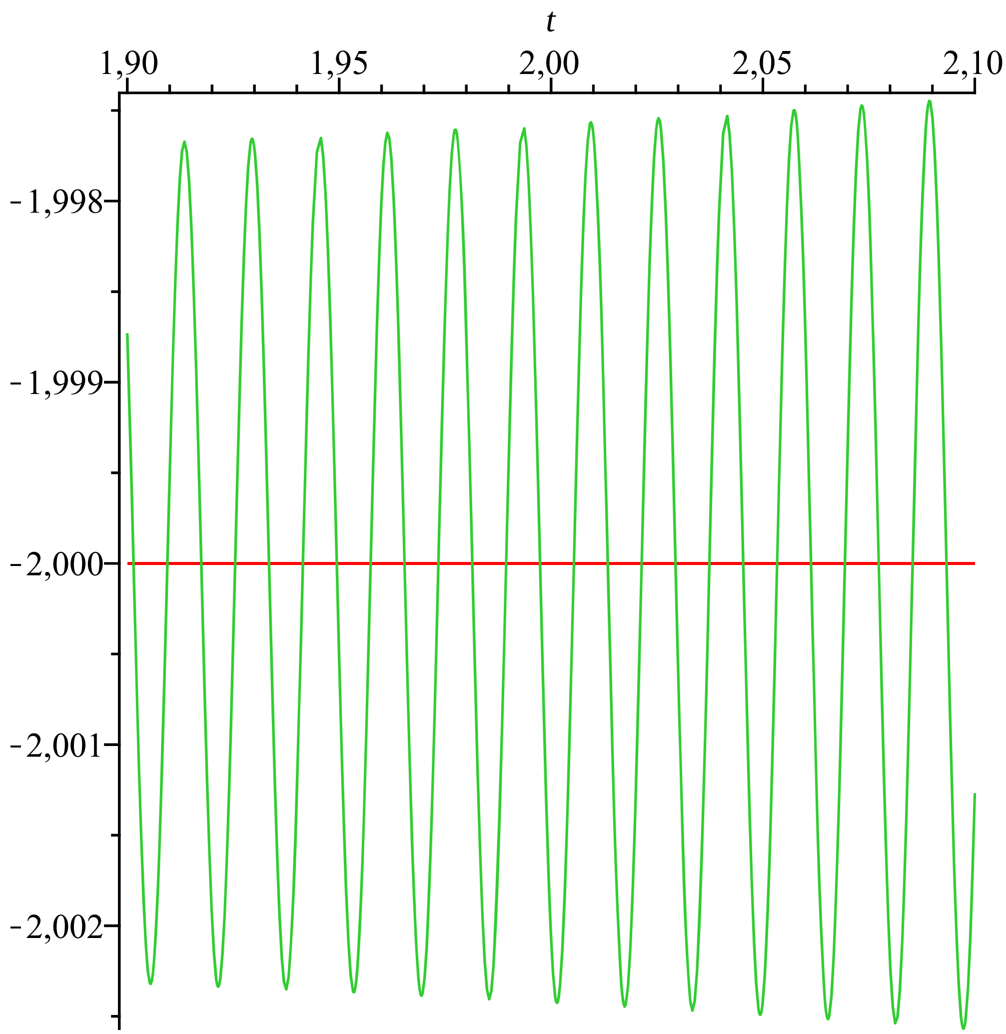
$$a_n := 0 \qquad (10)$$

> $b_n := \left(\frac{1}{L}\right)\cdot int\left(f\cdot\sin\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{L}\right), t=-L..L\right)$

$$b_n := \frac{4\cos\left(\frac{3}{4}\,n\,\pi\right)}{n\,\pi} - \frac{2\cos\left(\frac{1}{4}\,n\,\pi\right)}{n\,\pi} - \frac{2}{n\,\pi} \qquad (11)$$

> $STF_{500} := c + Sum\left(a_n\cdot\cos\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{L}\right) + b_n\cdot\sin\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot t}{L}\right), n=1..500\right):$

> $plot([f, STF_{500}], t=1.9..2.1)$



>

fin respuesta 2b)

> *restart*

3) **(30/100 puntos)** OBTENER LA SOLUCIÓN DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES, UTILIZANDO EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES CON UNA CONSTANTE DE SEPARACIÓN **POSITIVA**:

>

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x, y) - x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} z(x, y) \right) = z(x, y) \qquad \textbf{(12)}$$

>

respuesta 3)

> $Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x, y) - x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} z(x, y) \right) = z(x, y)$

$$Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x, y) - x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} z(x, y) \right) = z(x, y) \qquad \textbf{(13)}$$

> $EcuacionDos := eval(subs(z(x, y) = F(x) \cdot G(y), Ecuacion))$

$$EcuacionDos := F(x) \left(\frac{d^2}{dy^2} G(y) \right) - x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x) \right) G(y) = F(x)\, G(y) \qquad \textbf{(14)}$$

>

alternativa uno

> $EcuacionTres := \dfrac{\left(lhs(EcuacionDos) + x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x)\right) G(y)\right)}{F(x) \cdot G(y)} = simplify\left(\dfrac{\left(rhs(EcuacionDos) + x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x)\right) G(y)\right)}{F(x) \cdot G(y)}\right)$

$$EcuacionTres := \frac{\frac{d^2}{dy^2} G(y)}{G(y)} = \frac{F(x) + x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x)\right)}{F(x)} \quad \textbf{(15)}$$

> $EcuacionX := rhs(EcuacionTres) = \mathrm{alpha}; EcuacionY := lhs(EcuacionTres) = \mathrm{alpha}$

$$EcuacionX := \frac{F(x) + x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x)\right)}{F(x)} = \alpha$$

$$EcuacionY := \frac{\frac{d^2}{dy^2} G(y)}{G(y)} = \alpha \quad \textbf{(16)}$$

> $SolucionXpos := dsolve(subs(\mathrm{alpha} = \mathrm{beta} \cdot {}^{\cdot}2, EcuacionX)); SolucionYpos := dsolve(subs(\mathrm{alpha} = \mathrm{beta} \cdot {}^{\cdot}2, EcuacionY))$

$$SolucionXpos := F(x) = \_C1\, e^{-\frac{(\beta - 1)(\beta + 1)}{x}}$$

$$SolucionYpos := G(y) = \_C1\, e^{-\beta y} + \_C2\, e^{\beta y} \quad \textbf{(17)}$$

> $SolucionPos := z(x, y) = subs(\_C1 = 1, rhs(SolucionXpos)) \cdot rhs(SolucionYpos)$

$$SolucionPos := z(x, y) = e^{-\frac{(\beta - 1)(\beta + 1)}{x}} \left(\_C1\, e^{-\beta y} + \_C2\, e^{\beta y}\right) \quad \textbf{(18)}$$

>

alternativa dos

> $EcuacionCuatro := simplify\left(\dfrac{\left(lhs(EcuacionDos) + x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x)\right) G(y) - F(x) \cdot G(y)\right)}{F(x) \cdot G(y)}\right) = simplify\left(\dfrac{\left(rhs(EcuacionDos) + x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x)\right) G(y)\right) - F(x) \cdot G(y)}{F(x) \cdot G(y)}\right)$

$$EcuacionCuatro := \frac{\frac{d^2}{dy^2} G(y) - G(y)}{G(y)} = \frac{x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x)\right)}{F(x)} \quad \textbf{(19)}$$

> $EcuacionXX := rhs(EcuacionCuatro) = \mathrm{alpha}; EcuacionYY := lhs(EcuacionCuatro) = \mathrm{alpha}$

$$EcuacionXX := \frac{x^2 \left(\frac{d}{dx} F(x)\right)}{F(x)} = \alpha$$

(20)

$$EcuacionYY := \frac{\frac{d^2}{dy^2} G(y) - G(y)}{G(y)} = \alpha \quad (20)$$

> $SolucionXXpos := dsolve(subs(\mathrm{alpha} = \mathrm{beta} \cdot \cdot 2, EcuacionXX)); SolucionYYpos := dsolve(subs(\mathrm{alpha} = \mathrm{beta} \cdot \cdot 2, EcuacionYY))$

$$SolucionXXpos := F(x) = \_C1\, e^{-\frac{\beta^2}{x}}$$

$$SolucionYYpos := G(y) = \_C1 \sin\left(\sqrt{-1-\beta^2}\; y\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{-1-\beta^2}\; y\right) \quad (21)$$

> $SolucionPosPos := z(x, y) = subs(\_C1 = 1, rhs(SolucionXXpos)) \cdot rhs(SolucionYYpos)$

$$SolucionPosPos := z(x, y) = e^{-\frac{\beta^2}{x}} \left(\_C1 \sin\left(\sqrt{-1-\beta^2}\; y\right) + \_C2 \cos\left(\sqrt{-1-\beta^2}\; y\right)\right) \quad (22)$$

>

fin respuesta 3)

>

FIN EXAMEN

>