



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS  
COORDINACIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS APLICADAS  
ECUACIONES DIFERENCIALES  
PRIMER EXAMEN FINAL



SEMESTRE 2019 - 1  
DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS

27 DE NOVIEMBRE DE 2018  
TURNO: VESPERTINO

NOMBRE \_\_\_\_\_  
Apellido paterno                      Apellido materno                      Nombre (s)

Instrucciones:

Este examen es la demostración de su conocimiento sobre la asignatura, por lo que se sugiere leer cuidadosamente los enunciados antes de empezar a resolverlos.

- 
1. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \operatorname{sen}(x)$$

20 puntos

---

2. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + 4y = 4\operatorname{sec}(2x)$$

25 puntos

---

3. Aplicando el Teorema de Convulsión, obtenga la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{3}{s^2(s^2 + 9)}$$

15 puntos

---

4. Transforme el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y sus condiciones iniciales a un problema de valor inicial de segundo orden. Resuelva dicho problema mediante la Transformada de Laplace.

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2; & x_1(0) &= 0 \\x_2' &= 2x_2 + 3x_1 + \delta(t - 2); & x_2(0) &= 0\end{aligned}$$

25 puntos

---

5. Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la función  $f(x) = |x| + 2$ , definida en el intervalo  $-2 < x < 2$

15 puntos

---

# SOLUCIÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS  
COORDINACIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS APLICADAS  
ECUACIONES DIFERENCIALES  
PRIMER EXAMEN FINAL

SEMESTRE 2019-1  
NOVIEMBRE 27 DE 2018

> restart

1)

> EDO := diff(y(x), x) +  $\frac{y(x)}{x} = \sin(x)$

$$EDO := \frac{d}{dx} y(x) + \frac{y(x)}{x} = \sin(x) \quad (1)$$

> SolGral := expand(dsolve(EDO))

$$SolGral := y(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} + \frac{C1}{x} \quad (2)$$

> restart

2)

> EDO := diff(y(x), x\$2) + 4·y(x) = 4·sec(2 x)

$$EDO := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 4 y(x) = 4 \sec(2 x) \quad (3)$$

> SolGral := simplify(dsolve(EDO))

$$SolGral := y(x) = \sin(2 x) \_C2 + \cos(2 x) \_C1 + 2 x \sin(2 x) + \ln(\cos(2 x)) \cos(2 x) \quad (4)$$

> restart

3)

> with(inttrans) :

> F(s) :=  $\frac{3}{s \cdot 2 \cdot (s \cdot 2 + 9)}$

$$F(s) := \frac{3}{s^2 (s^2 + 9)} \quad (5)$$

> f(t) := invlaplace(F(s), s, t)

$$f(t) := -\frac{1}{9} \sin(3 t) + \frac{1}{3} t \quad (6)$$

> FF(s) := laplace(f(t), t, s)

$$FF(s) := \frac{3}{s^2 (s^2 + 9)} \quad (7)$$

> restart

4) Resolver mediante Transformada de Laplace

> with(inttrans) :

> Sistema := diff(x[1](t), t) = x[2](t), diff(x[2](t), t) = 2·x[2](t) + 3·x[1](t) + Dirac(t - 2) : Sistema[1]; Sistema[2]

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = 2x_2(t) + 3x_1(t) + \text{Dirac}(t-2) \quad (8)$$

> *Cond* :=  $x[1](0) = 0, x[2](0) = 0$

$$\text{Cond} := x_1(0) = 0, x_2(0) = 0 \quad (9)$$

> *SistTrans* :=  $\text{subs}(\text{Cond}, \text{laplace}(\{\text{Sistema}\}, t, s)) : \text{SistTrans}[1]; \text{SistTrans}[2]$   
 $s \text{laplace}(x_1(t), t, s) = \text{laplace}(x_2(t), t, s)$

$$s \text{laplace}(x_2(t), t, s) = 2 \text{laplace}(x_2(t), t, s) + 3 \text{laplace}(x_1(t), t, s) + e^{-2s} \quad (10)$$

> *SolTrans* :=  $\text{solve}(\{\text{SistTrans}[1], \text{SistTrans}[2]\}, \{\text{laplace}(x[1](t), t, s), \text{laplace}(x[2](t), t, s)\}) : \text{SolTrans}[1]; \text{SolTrans}[2]$

$$\text{laplace}(x_1(t), t, s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 - 2s - 3}$$

$$\text{laplace}(x_2(t), t, s) = \frac{s e^{-2s}}{s^2 - 2s - 3} \quad (11)$$

> *SolPart* :=  $\text{invlaplace}(\text{SolTrans}, s, t) : \text{SolPart}[1]; \text{SolPart}[2]$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \text{Heaviside}(t-2) e^{t-2} \sinh(2t-4)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{4} \text{Heaviside}(t-2) (3e^{-6+3t} + e^{2-t}) \quad (12)$$

> *SolPartUno* :=  $(\text{simplify}(\text{convert}(\text{SolPart}[1], \text{exp})))$

$$\text{SolPartUno} := x_1(t) = \frac{1}{4} \text{Heaviside}(t-2) (e^{-6+3t} - e^{2-t}) \quad (13)$$

> *SolPart*[2]

$$x_2(t) = \frac{1}{4} \text{Heaviside}(t-2) (3e^{-6+3t} + e^{2-t}) \quad (14)$$

> *SOL* :=  $\text{dsolve}(\{\text{Sistema}, \text{Cond}\}) : \text{SOL}[1]; \text{SOL}[2]$

$$x_1(t) = \frac{1}{4} \text{Heaviside}(t-2) e^{-6+3t} - \frac{1}{4} \text{Heaviside}(t-2) e^{2-t}$$

$$x_2(t) = \frac{3}{4} \text{Heaviside}(t-2) e^{-6+3t} + \frac{1}{4} \text{Heaviside}(t-2) e^{2-t} \quad (15)$$

> *Comprobacion*[2] :=  $\text{simplify}(\text{rhs}(\text{SolPart}[2]) - \text{rhs}(\text{SOL}[2])) = 0$

$$\text{Comprobacion}_2 := 0 = 0 \quad (16)$$

> *Comprobacion*[1] :=  $\text{simplify}(\text{rhs}(\text{SolPartUno}) - \text{rhs}(\text{SOL}[1])) = 0$

$$\text{Comprobacion}_1 := 0 = 0 \quad (17)$$

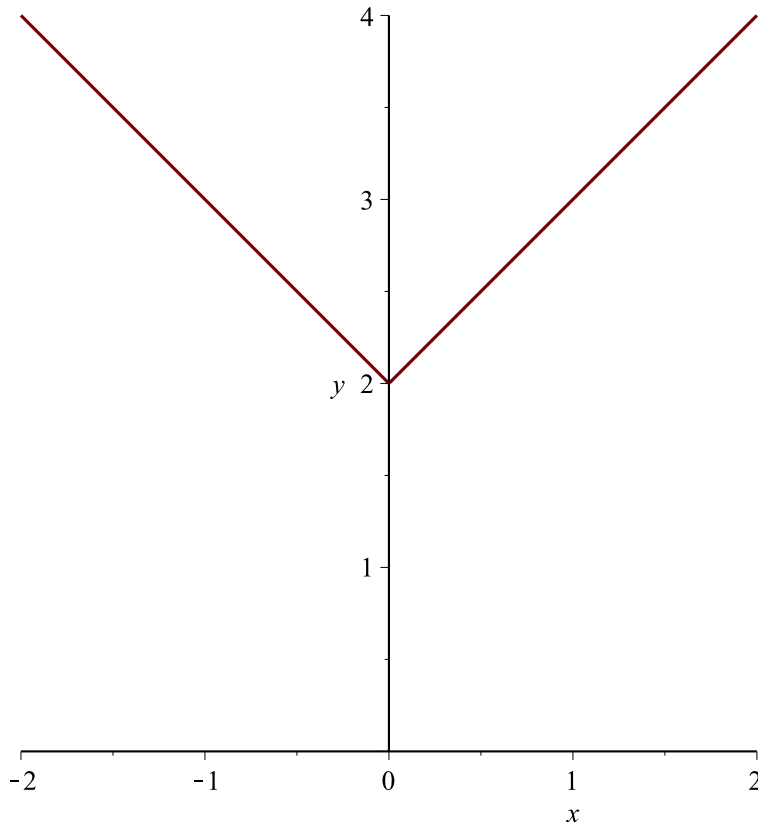
> *restart*

5) Serie de Fourier

> *Funcion* :=  $f(x) = \text{abs}(x) + 2$

$$\text{Funcion} := f(x) = |x| + 2 \quad (18)$$

>  $\text{plot}(\text{rhs}(\text{Funcion}), x=-2..2, y=0..4, \text{scaling} = \text{CONSTRAINED})$



$$\text{> } L := 2$$

$$L := 2$$

(19)

$$\text{> } a[0] := \frac{1}{L} \cdot \text{int}(rhs(\text{Funcion}), x=-L..L)$$

$$a_0 := 6$$

(20)

$$\text{> } a[n] := \frac{1}{L} \cdot \text{int}\left(rhs(\text{Funcion}) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \text{Pi} \cdot x}{L}\right), x=-L..L\right)$$

$$a_n := \frac{4 (2 \sin(n \pi) n \pi + \cos(n \pi) - 1)}{n^2 \pi^2}$$

(21)

$$\text{> } b[n] := \frac{1}{L} \cdot \text{int}\left(rhs(\text{Funcion}) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \text{Pi} \cdot x}{L}\right), x=-L..L\right)$$

$$b_n := 0$$

(22)

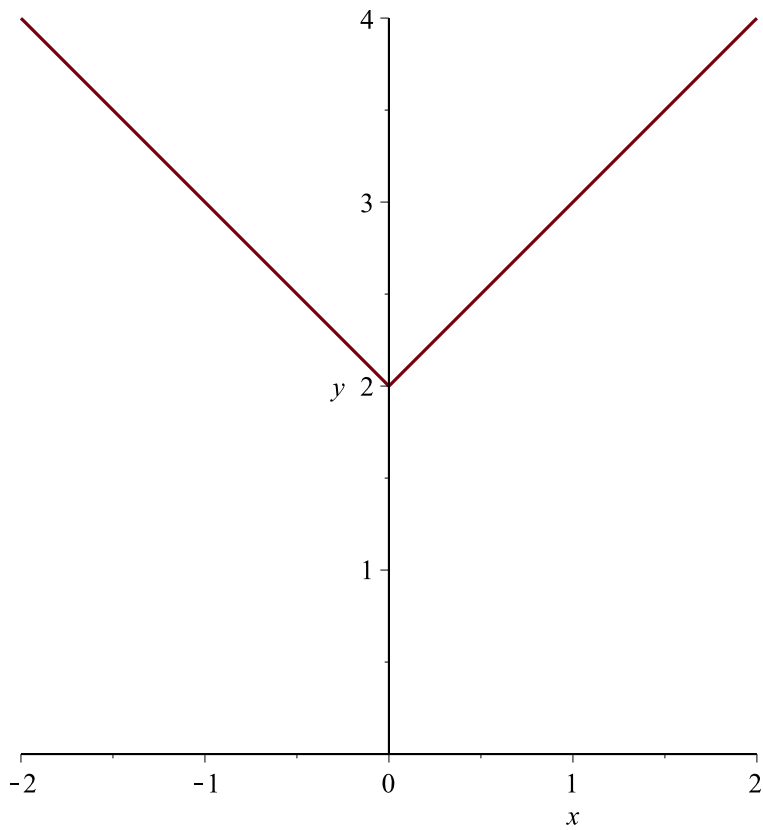
$$\text{> } STF := f(x) = \frac{a[0]}{2} + \text{Sum}\left(a[n] \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \text{Pi} \cdot x}{L}\right), n=1..infinity\right)$$

$$STF := f(x) = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 (2 \sin(n \pi) n \pi + \cos(n \pi) - 1) \cos\left(\frac{1}{2} n \pi x\right)}{n^2 \pi^2}$$

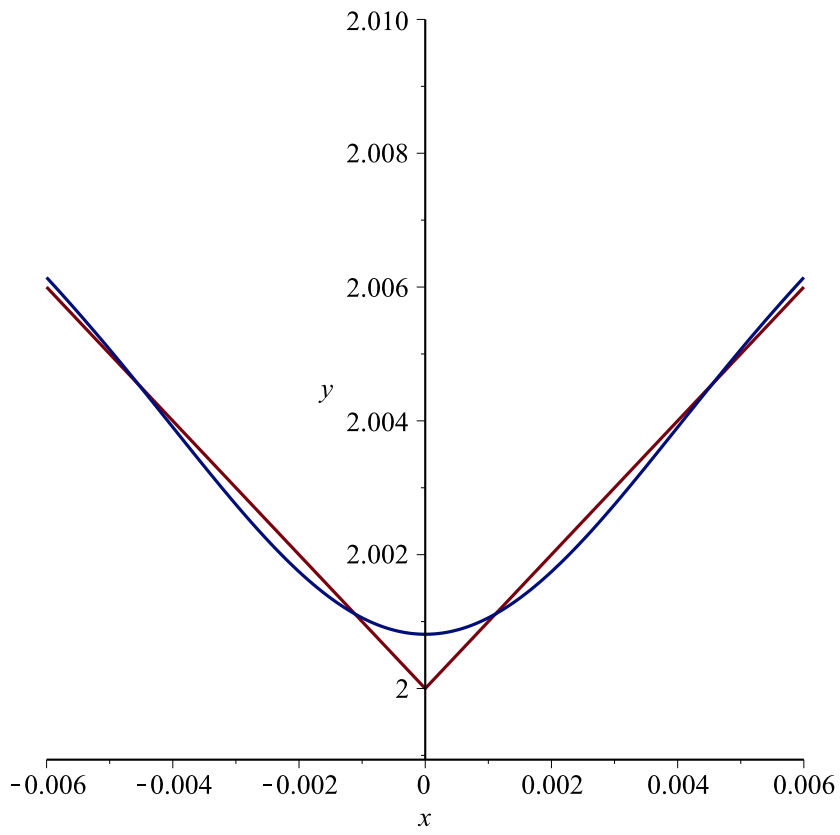
(23)

```
> STF500 :=  $\frac{a[0]}{2} + \text{Sum}\left(a[n] \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \text{Pi} \cdot x}{L}\right), n = 1 .. 500\right) :$ 
```

```
> plot(STF500, x = -L..L, y = 0..4, scaling = CONSTRAINED)
```



```
> plot([rhs(Funcion), STF500], x = -0.006..0.006, y = 1.999..2.01)
```



```
> restart  
FIN EXAMEN  
>
```