UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS APLICADAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN FINAL

SEMESTRE 2019 - 1
DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS

04 DE DICIEMBRE DE 2018

NOMBRE ______________________ ______________________ ______________________
Apellido paterno Apellido materno Nombre (s)

Instrucciones:
Este examen es la demostración de su conocimiento sobre la asignatura, por lo que se sugiere leer cuidadosamente los enunciados antes de empezar a resolverlos.

---

1. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$$

20 puntos

---

2. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$D(xD - I)y = x + xsen(x)$$

Nota: I denota el operador identidad y D el operador derivada.

20 puntos

---

3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante la Transformada de Laplace

$$\begin{aligned} x' - x - y' + y = 0; &\qquad x(0) = 0 \\ x' + y' + 2y = 0; &\qquad y(0) = 1 \end{aligned}$$

20 puntos

---

4. Encuentre la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \delta(t-5)$$

que satisface la condición inicial $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$.

20 puntos

---

5. Resuelva la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + y = 0$$

para una constante de separación positiva y que satisfaga la condición en la frontera dada por $y(x,0) = 4x^9$.

20puntos

> *restart*

SOLUCION

ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN FINAL

SEMESTRE 2019-1
DICIEMBRE 4 DE 2018

> *restart*

1) Encuentre solución general

> $EDO := diff(y(x), x) = \dfrac{y(x)}{(x + \mathrm{sqrt}(x \cdot y(x)))}$

$$EDO := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) = \frac{y(x)}{x + \sqrt{x\, y(x)}} \qquad \textbf{(1)}$$

> $SolGral := dsolve(EDO)$

$$SolGral := \ln(y(x)) - \frac{2\, x}{\sqrt{x\, y(x)}} - \_C1 = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

> *restart*

2) Encuentre la solución general

> $EDO := simplify(isolate(diff(x \cdot diff(y(x), x) - y(x), x) = x + x \cdot \sin(x), diff(y(x), x\$2)))$

$$EDO := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\, y(x) = \sin(x) + 1 \qquad \textbf{(3)}$$

> $SolGral := dsolve(EDO)$

$$SolGral := y(x) = -\sin(x) + \frac{1}{2}\, x^2 + \_C1\, x + \_C2 \qquad \textbf{(4)}$$

> *restart*

3) Resolver mediante Transformada de Laplace

> $EcuaUno := diff(x(t), t) - x(t) - diff(y(t), t) + y(t) = 0$

$$EcuaUno := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, x(t) - x(t) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t)\right) + y(t) = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

> $EcuaDos := diff(x(t), t) + diff(y(t), t) + 2 \cdot y(t) = 0$

$$EcuaDos := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, x(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t) + 2\, y(t) = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

> $Cond := x(0) = 0, y(0) = 1$

$$Cond := x(0) = 0, y(0) = 1 \qquad \textbf{(7)}$$

> $with(inttrans) :$

> $TransEcuaUno := subs(Cond, laplace(EcuaUno, t, s))$

$$TransEcuaUno := s\, laplace(x(t), t, s) - laplace(x(t), t, s) - s\, laplace(y(t), t, s) + 1 + laplace(y(t), t, s) = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

> $TransEcuaDos := subs(Cond, laplace(EcuaDos, t, s))$

$$TransEcuaDos := s\, laplace(x(t), t, s) + s\, laplace(y(t), t, s) - 1 + 2\, laplace(y(t), t, s) = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

> $TransSol := solve(\{TransEcuaUno, TransEcuaDos\}, \{laplace(x(t), t, s), laplace(y(t), t, s)\})$

$$TransSol := \left\{ laplace(x(t), t, s) = -\frac{3}{2\,(s^2 - 1)}, laplace(y(t), t, s) = \frac{1}{2}\, \frac{2\, s - 1}{s^2 - 1} \right\} \qquad \textbf{(10)}$$

> $SolPartUno := convert(invlaplace(TransSol[1], s, t), \exp)$

(11)

$$SolPartUno := x(t) = -\frac{3}{4}\,e^{t} + \frac{3}{4}\,e^{-t} \qquad \textbf{(11)}$$

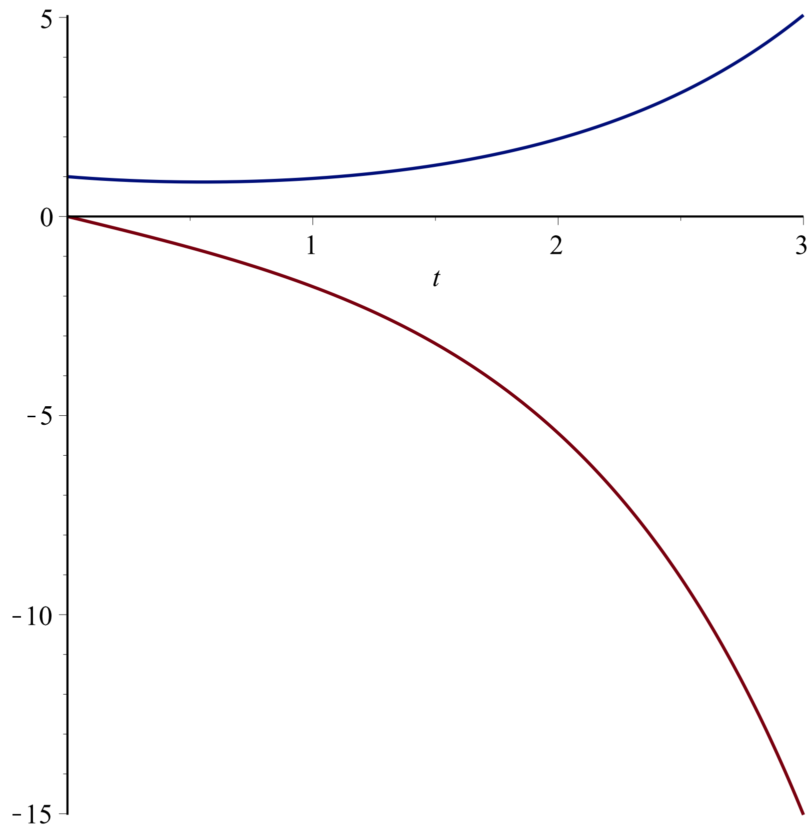
> $SolPartDos := invlaplace(TransSol[2], s, t)$

$$SolPartDos := y(t) = \frac{1}{4}\,e^{t} + \frac{3}{4}\,e^{-t} \qquad \textbf{(12)}$$

> $SOLPART := dsolve(\{EcuaUno, EcuaDos, Cond\})$

$$SOLPART := \left\{x(t) = -\frac{3}{4}\,e^{t} + \frac{3}{4}\,e^{-t}, y(t) = \frac{1}{4}\,e^{t} + \frac{3}{4}\,e^{-t}\right\} \qquad \textbf{(13)}$$

> $plot([rhs(SOLPART[1]), rhs(SOLPART[2])], t = 0..3)$



> $restart$

4) Encuentre la solución particular

> $EDO := diff(y(t), t\$2) + 2\cdot diff(y(t), t) + 2\cdot y(t) = \mathrm{Dirac}(t-5)$

$$EDO := \frac{d^2}{dt^2}\,y(t) + 2\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right) + 2\,y(t) = \mathrm{Dirac}(t-5) \qquad \textbf{(14)}$$

> $Cond := y(0) = -1, \mathrm{D}(y)(0) = 3$

$$Cond := y(0) = -1, \mathrm{D}(y)(0) = 3 \qquad \textbf{(15)}$$

> $with(inttrans):$

> $TransEDO := subs(Cond, laplace(EDO, t, s))$

$$TransEDO := s^2\, laplace(y(t), t, s) - 1 + s + 2\, s\, laplace(y(t), t, s) + 2\, laplace(y(t), t, s) = e^{-5\, s} \quad \textbf{(16)}$$

> $TransSOL := isolate(TransEDO, laplace(y(t), t, s))$

$$TransSOL := laplace(y(t), t, s) = \frac{e^{-5\, s} - s + 1}{s^2 + 2\, s + 2} \quad \textbf{(17)}$$

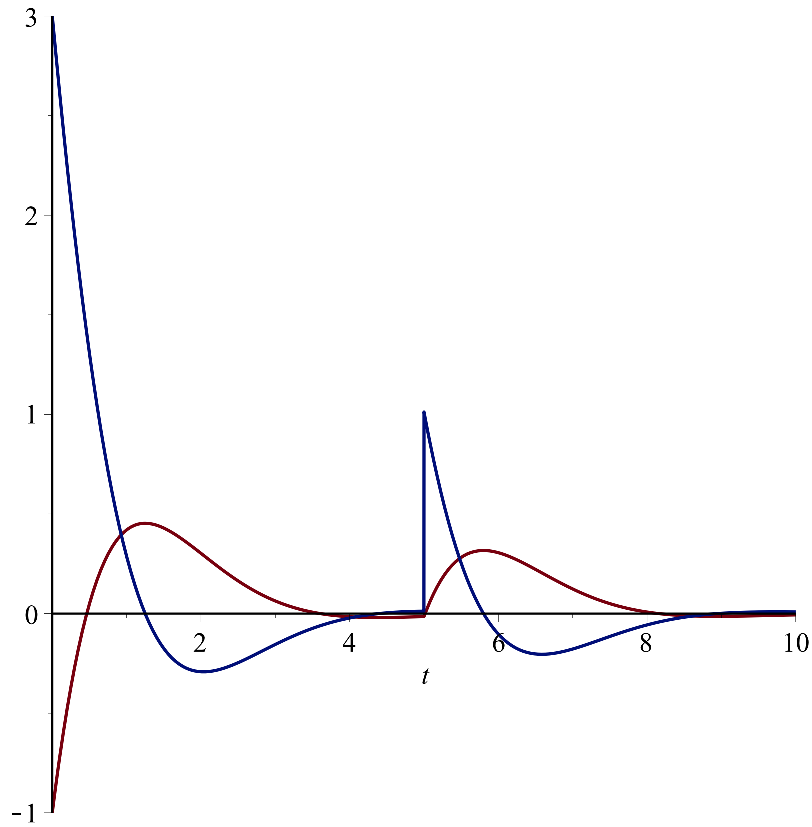
> $SolPart := invlaplace(TransSOL, s, t)$

$$SolPart := y(t) = e^{-t}\, (-\cos(t) + 2\sin(t)) + \text{Heaviside}(t-5)\, e^{5-t} \sin(t-5) \quad \textbf{(18)}$$

> $DerSolPart := simplify(diff(SolPart, t))$

$$DerSolPart := \frac{d}{dt}\, y(t) = -\text{Heaviside}(t-5)\, e^{5-t} \sin(t-5) + \text{Heaviside}(t-5)\, e^{5-t} \cos(t - 5) + 3\, e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t) \quad \textbf{(19)}$$

> $plot([rhs(SolPart), rhs(diff(SolPart, t))], t = 0 ..10)$



> $restart$

5) Resuleva EDenDP con una constante de separación positiva y que satisfaga la condición de frontera dada

> $EDenDP := x \cdot diff(y(x, t), x, t) + y(x, t) = 0$

$$EDenDP := x \left(\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial t}\, y(x, t) \right) + y(x, t) = 0 \quad \textbf{(20)}$$

> $Cond := y(x,0) = 4\cdot x\cdot\cdot 9$

$$Cond := y(x,0) = 4\,x^9 \tag{21}$$

> $EDO := eval(subs(y(x,t) = F(x)\cdot G(t), EDenDP))$

$$EDO := x\left(\frac{d}{dx}F(x)\right)\left(\frac{d}{dt}G(t)\right) + F(x)\,G(t) = 0 \tag{22}$$

> $EDOuno := lhs(EDO) - F(x)\cdot G(t) = rhs(EDO) - F(x)\cdot G(t)$

$$EDOuno := x\left(\frac{d}{dx}F(x)\right)\left(\frac{d}{dt}G(t)\right) = -F(x)\,G(t) \tag{23}$$

> $EDOdos := \dfrac{lhs(EDOuno)}{F(x)\cdot diff(G(t),t)} = \dfrac{rhs(EDOuno)}{F(x)\cdot diff(G(t),t)}$

$$EDOdos := \frac{x\left(\frac{d}{dx}F(x)\right)}{F(x)} = -\frac{G(t)}{\frac{d}{dt}G(t)} \tag{24}$$

> $EdoX := lhs(EDOdos) = \mathrm{beta}\cdot\cdot 2$

$$EdoX := \frac{x\left(\frac{d}{dx}F(x)\right)}{F(x)} = \beta^2 \tag{25}$$

> $EdoT := rhs(EDOdos) = \mathrm{beta}\cdot\cdot 2$

$$EdoT := -\frac{G(t)}{\frac{d}{dt}G(t)} = \beta^2 \tag{26}$$

> $SolX := \boldsymbol{dsolve(EdoX)}$

$$SolX := F(x) = \_C1\,x^{\beta^2} \tag{27}$$

> $SolT := dsolve(EdoT)$

$$SolT := G(t) = \_C1\,e^{-\frac{t}{\beta^2}} \tag{28}$$

> $SolGral := y(x,t) = rhs(SolX)\cdot subs(\_C1 = 1, rhs(SolT))$

$$SolGral := y(x,t) = \_C1\,x^{\beta^2}\,e^{-\frac{t}{\beta^2}} \tag{29}$$

> $SolFront := subs(t=0, rhs(SolGral)) = rhs(Cond)$

$$SolFront := \_C1\,x^{\beta^2}\,e^0 = 4\,x^9 \tag{30}$$

> $Param := \_C1 = 4, \mathrm{beta} = 3$

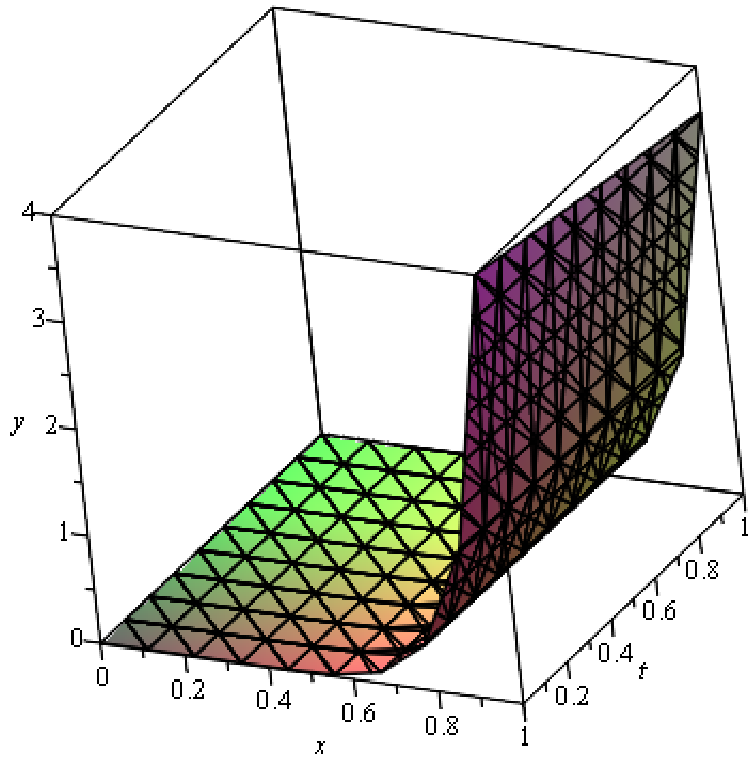
$$Param := \_C1 = 4, \beta = 3 \tag{31}$$

> $SolPart := subs(Param, SolGral)$

$$SolPart := y(x,t) = 4\,x^9\,e^{-\frac{1}{9}t} \tag{32}$$

> $with(plots):$

> $implicitplot3d(y = rhs(SolPart), x = 0..1, t = 0..1, y = 0..4)$



>

> *restart*

FIN EXAMEN