>

SOLUCION

>

FACULTAD DE INGENIERIA
ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN PARCIAL
SEMESTRE 2012-2

30 MARZO 2012

> *restart*

1)

> $Ecuacion := x\cdot diff(y(x), x)\cdot\cdot 2 - 2\cdot y(x)\cdot diff(y(x), x) = -4\cdot x$

$$Ecuacion := x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 - 2\,y(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = -4\,x \quad (1)$$

>

RESPUESTA a) CLASIFICACIÓN: Ecuación Diferencial Ordinaria de orden 1 No Lineal, grado 2.
EDO(O=1).NL.G=2

> $SolucionGeneral := y(x) = \frac{x\cdot\cdot 2}{C1} + C1$

$$SolucionGeneral := y(x) = \frac{x^2}{C1} + C1 \quad (2)$$

> $funcion_1 := y(x) = \frac{1}{3}\cdot x\cdot\cdot 2 + \frac{1}{3}; funcion_2 := y(x) = \frac{1}{5}\cdot x\cdot\cdot 2 + 5; funcion_3 := y(x) = -x\cdot\cdot 2 - 1; funcion_4 := y(x) = -4\cdot x; funcion_5 := y(x) = 2\cdot x;$

$$funcion_1 := y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}$$
$$funcion_2 := y(x) = \frac{1}{5}x^2 + 5$$
$$funcion_3 := y(x) = -x^2 - 1$$
$$funcion_4 := y(x) = -4\,x$$
$$funcion_5 := y(x) = 2\,x \quad (3)$$

RESPUESTA b)

> $comp_1 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_1), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comp_1 := \frac{32}{9}\,x = 0 \quad (4)$$

POR LO TANTO LA FUNCIÓN 1 **NO ES SOLUCIÓN**

> $comp_2 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_2), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comp_2 := 0 = 0 \quad (5)$$

> $com_{20} := solve(rhs(SolucionGeneral) = rhs(funcion_2), C1)$

$$com_{20} := 5, \frac{1}{5}\,x^2 \quad (6)$$

POR LO TANTO LA FUNCION 2 ES UNA **SOLUCIÓN PARTICULAR** CUANDO C1 VALE 5

> $comp_3 := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(funcion_3), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comp_3 := 0 = 0 \quad (7)$$

> $com_{30} := solve\left(rhs(SolucionGeneral) = rhs\left(funcion_3\right), C1\right)$

$$com_{30} := -1, -x^2 \quad (8)$$

POR LO TANTO LA FUNCIÓN 3 ES UNA **SOLUCIÓN PARTICULAR** CUANDO C1 VALE -1

> $comp_4 := simplify\left(eval\left(subs\left(y(x) = rhs\left(funcion_4\right), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0\right)\right)\right)$

$$comp_4 := -12\, x = 0 \quad (9)$$

POR LO TANTO LA FUNCIÓN 4 **NO ES SOLUCIÓN**

> $comp_5 := simplify\left(eval\left(subs\left(y(x) = rhs\left(funcion_5\right), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0\right)\right)\right)$

$$comp_5 := 0 = 0 \quad (10)$$

> $com_{50} := solve\left(rhs(SolucionGeneral) = rhs\left(funcion_5\right), C1\right)$

$$com_{50} := x, x \quad (11)$$

POR LO TANTO LA FUNCIÓN 5 ES UNA **SOLUCIÓN SINGULAR** DADO QUE NO HAY VALOR REAL PARA C1

>

FIN RESPUESTA 1)

> *restart*

2)

> $SolucionGeneral := y(x) = C1 \cdot \exp(-2 \cdot x) \cdot \cos(3 \cdot x) + C2 \cdot \exp(-2 \cdot x) \cdot \sin(3 \cdot x) + \cos(3 \cdot x) + 5 \cdot \sin(3 \cdot x)$

$$SolucionGeneral := y(x) = C1\, e^{-2x} \cos(3x) + C2\, e^{-2x} \sin(3x) + \cos(3x) + 5 \sin(3x) \quad (12)$$

RESPUESTA a)

> $Sistema := eval(subs(x = 0, rhs(SolucionGeneral))) = 3, eval\left(subs\left(x = \frac{\mathrm{Pi}}{2}, rhs(SolucionGeneral)\right)\right) = 3 :$

> $Parametro := solve(\{Sistema\}, \{C1, C2\})$

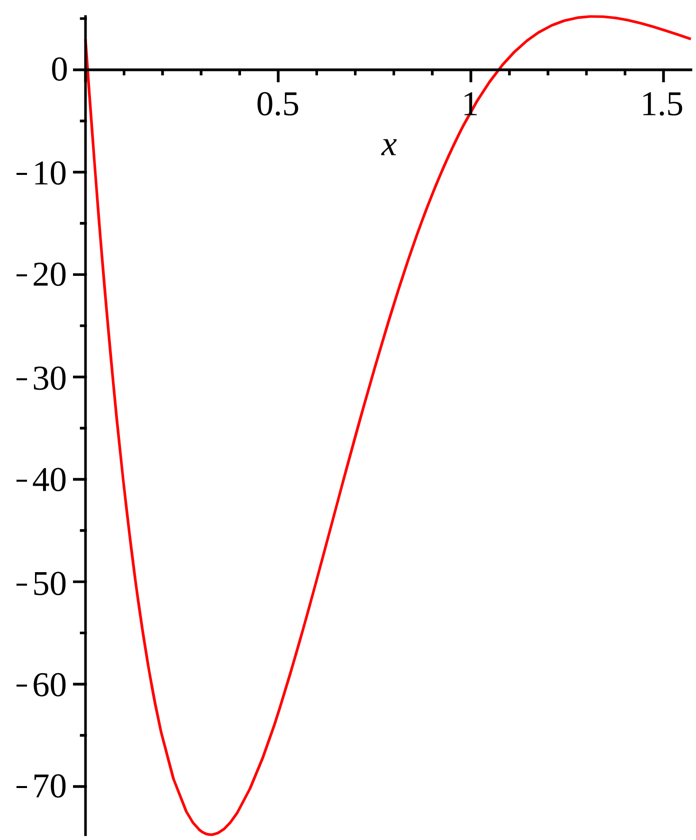
$$Parametro := \left\{C1 = 2, C2 = -\frac{8}{e^{-\pi}}\right\} \quad (13)$$

> $SolucionParticular := simplify\left(subs\left(C1 = rhs\left(Parametro_1\right), C2 = rhs\left(Parametro_2\right), SolucionGeneral\right)\right)$

$$SolucionParticular := y(x) = 2\, e^{-2x} \cos(3x) - 8\, e^{-2x + \pi} \sin(3x) + \cos(3x) + 5 \sin(3x) \quad (14)$$

RESPUESTA b)

> $plot\left(rhs(SolucionParticular), x = 0 .. \frac{\mathrm{Pi}}{2}\right)$



RESPUESTA c) RUTA 1

> $SolucionHomogenea := y(x) = C1 \cdot \exp(-2 \cdot x) \cdot \cos(3 \cdot x) + C2 \cdot \exp(-2 \cdot x) \cdot \sin(3 \cdot x);$
> $SolucionParticular := y(x) = \cos(3\,x) + 5\sin(3\,x)$

$$SolucionHomogenea := y(x) = C1\, e^{-2\,x} \cos(3\,x) + C2\, e^{-2\,x} \sin(3\,x)$$

$$SolucionParticular := y(x) = \cos(3\,x) + 5\sin(3\,x) \quad \textbf{(15)}$$

> $EcuacionCaractistica := expand((m + 2 + 3\,I) \cdot (m + 2 - 3\,I)) = 0$

$$EcuacionCaractistica := m^2 + 4\,m + 13 = 0 \quad \textbf{(16)}$$

> $EcuacionHomogenea := diff(y(x), x\$2) + 4\,diff(y(x), x) + 13\,y(x) = 0$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + 4\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + 13\,y(x) = 0 \quad \textbf{(17)}$$

> $Q(x) := simplify(eval(subs(y(x) = rhs(SolucionParticular), lhs(EcuacionHomogenea))))$

$$Q(x) := 64\cos(3\,x) + 8\sin(3\,x) \quad \textbf{(18)}$$

> $EcuacionNoHomogenea := lhs(EcuacionHomogenea) = Q(x);$

$$EcuacionNoHomogenea := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + 4\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + 13\,y(x) = 64\cos(3\,x) + 8\sin(3\,x) \quad \textbf{(19)}$$

CLASIFICACIÓN: Ecuación Diferencial Ordinaria 2° orden Lineal coeficientes constantes No Homogénea
(E.D.O.(2).L.cc.NH)

>

RESPUESTA c) RUTA 2

> $SolucionGeneral;$

$$y(x) = C1\, e^{-2\,x} \cos(3\,x) + C2\, e^{-2\,x} \sin(3\,x) + \cos(3\,x) + 5\sin(3\,x) \quad \textbf{(20)}$$

> *Sistema* := *diff* (*SolucionGeneral*, *x*), *diff* (*SolucionGeneral*, *x*$2) :

> *Parametro* := *solve*({*Sistema*}, {*C1*, *C2*})

$$Parametro := \left\{ C1 = \frac{1}{39} \frac{1}{e^{-2x} \left(\cos(3x)^2 + \sin(3x)^2\right)} \left(153 \cos(3x)^2 - 78 \cos(3x) \sin(3x) - 3 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) \cos(3x) - 12 \cos(3x) \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + 75 \sin(3x)^2 + 2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) \sin(3x) - 5 \sin(3x) \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)\right), C2 = -\frac{1}{39} \frac{1}{e^{-2x} \left(\cos(3x)^2 + \sin(3x)^2\right)} \left(2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) \cos(3x) + 3 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) \sin(3x) + 93 \cos(3x)^2 - 78 \cos(3x) \sin(3x) + 171 \sin(3x)^2 - 5 \cos(3x) \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + 12 \sin(3x) \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)\right) \right\} \quad \textbf{(21)}$$

> *EcuacionInicial* := *simplify*(*eval*(*subs*(*C1* = *rhs*(*Parametro*$_1$), *C2* = *rhs*(*Parametro*$_2$), *SolucionGeneral*)))

$$EcuacionInicial := y(x) = \frac{64}{13} \cos(3x) + \frac{8}{13} \sin(3x) - \frac{1}{13} \frac{d^2}{dx^2} y(x) - \frac{4}{13} \frac{d}{dx} y(x) \quad \textbf{(22)}$$

> *Ecuacion* := *lhs*(*EcuacionInicial*) · 13 − *rhs*(*EcuacionInicial*) · 13 = 0

$$Ecuacion := 13\, y(x) - 64 \cos(3x) - 8 \sin(3x) + \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 4 \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) = 0 \quad \textbf{(23)}$$

> *EcuacionFinal* := *lhs*(*Ecuacion*) − (− 64 cos(3 *x*) − 8 sin(3 *x*)) = *rhs*(*Ecuacion*) − (− 64 cos(3 *x*) − 8 sin(3 *x*))

$$EcuacionFinal := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 4 \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + 13\, y(x) = 64 \cos(3x) + 8 \sin(3x) \quad \textbf{(24)}$$

CLASIFICACIÓN: Ecuación Diferencial Ordinaria 2° orden Lineal coeficientes constantes No Homogénea
(E.D.O.(2).L.cc.NH)

>

FIN RESPUESTA 2)

> *restart*

3)

> *Ecuacion* := *diff* (*x*(*t*), *t*) + *x*(*t*) · sin(*t*) = sin(*t*) · cos(*t*)

$$Ecuacion := \frac{d}{dt} x(t) + x(t) \sin(t) = \sin(t) \cos(t) \quad \textbf{(25)}$$

RESPUESTA 3)

> *p*(*t*) := sin(*t*); *q*(*t*) := *rhs*(*Ecuacion*)

$$p(t) := \sin(t)$$
$$q(t) := \sin(t) \cos(t) \quad \textbf{(26)}$$

> $Ip := int(p(t), t)$

$$Ip := -\cos(t) \quad (27)$$

> $Eneg := \exp(-Ip)$

$$Eneg := e^{\cos(t)} \quad (28)$$

> $Epos := \exp(Ip)$

$$Epos := e^{-\cos(t)} \quad (29)$$

> $SolucionGeneral := x(t) = simplify(C1 \cdot Eneg + Eneg \cdot int(Epos \cdot q(t), t))$

$$SolucionGeneral := x(t) = C1\, e^{\cos(t)} + \cos(t) + 1 \quad (30)$$

COMPROBACION

> $comp_1 := simplify(eval(subs(x(t) = rhs(SolucionGeneral), lhs(Ecuacion) - rhs(Ecuacion) = 0)))$

$$comp_1 := 0 = 0 \quad (31)$$

>

FIN RESPUESTA 3)

> restart

4)

>

RESPUESTA 4)

> $AB := array\left(\left[\left[\frac{13}{16}, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{16}\right], \left[-\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\right], \left[-\frac{3}{16}, -\frac{1}{4}, \frac{11}{16}\right]\right]\right) : AC := array\left(\left[\left[\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right], \left[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right]\right]\right) : AD := array\left(\left[\left[\frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right], \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right], \left[\frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right]\right]\right) :$

> $MatrizExponencial := evalm(AB + t \cdot AC + \exp(4 \cdot t) \cdot AD)$

$$MatrizExponencial := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} & -\frac{5}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{16}e^{4t} \\ -\frac{3}{8} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}e^{4t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{4t} & -\frac{5}{8} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{8}e^{4t} \\ -\frac{3}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} & \frac{11}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{16}e^{4t} \end{bmatrix} \quad (32)$$

> $with(linalg) :$

> $DerMatExp := map(diff, MatrizExponencial, t);$

$$DerMatExp := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{4t} & e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{4t} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{4t} & 2\,e^{4t} & \frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{4t} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{4t} & e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{4t} \end{bmatrix} \quad (33)$$

> $MatrizAA := map(rcurry(eval, t = '0'), DerMatExp)$

(34)

$$MatrizAA := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{(34)}$$

> *CompMatExp* := *exponential*(*MatrizAA*, *t*)

$$CompMatExp := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} & -\frac{5}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{16}e^{4t} \\ -\frac{3}{8} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}e^{4t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{4t} & -\frac{5}{8} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{8}e^{4t} \\ -\frac{3}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}e^{4t} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} & \frac{11}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{5}{16}e^{4t} \end{bmatrix} \quad \mathbf{(35)}$$

>

FIN RESPUESTA 4)

> *restart*

5)

>

RESPUESTA 5a) RUTA 1

> *Sistema* := *diff*(x(t), t) = x(t) + y(t) + z(t) + exp(3·t), *diff*(y(t), t) = x(t) + y(t) + z(t) + exp(2·t), *diff*(z(t), t) = x(t) + y(t) + z(t) + exp(t) : $Sistema_1$; $Sistema_2$; $Sistema_3$;

$$\frac{d}{dt} x(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{3t}$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{2t}$$

$$\frac{d}{dt} z(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{t} \quad \mathbf{(36)}$$

> *Condiciones* := x(0) = 1, y(0) = −1, z(0) = 0;

$$Condiciones := x(0) = 1, y(0) = -1, z(0) = 0 \quad \mathbf{(37)}$$

> *Solucion* := *dsolve*({*Sistema*, *Condiciones*}) : $Solucion_1$; $Solucion_2$; $Solucion_3$;

$$x(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{3}e^{3t}t + \frac{13}{18}e^{3t} + \frac{23}{18}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{3}e^{3t}t + \frac{7}{18}e^{3t} - \frac{8}{9}$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{3t}t + \frac{7}{18}e^{3t} - \frac{7}{18} + \frac{1}{2}e^{t} \quad \mathbf{(38)}$$

>

RESPUESTA 5a) RUTA 2

> *AA* := *array*([[1, 1, 1], [1, 1, 1], [1, 1, 1]])

$$AA := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{(39)}$$

> *BB* := *array*([exp(3·t), exp(2·t), exp(t)])

(40)

$$BB := \left[\begin{array}{ccc} e^{3t} & e^{2t} & e^{t} \end{array}\right] \quad (40)$$

> *Xcero* := *array*([1, -1, 0])

$$Xcero := \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad (41)$$

> *with*(*linalg*) :

> *MatExp* := *exponential*(*AA*, *t*)

$$MatExp := \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{3t} & \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{3t} & \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{3t} \end{array}\right] \quad (42)$$

>

> *SOLUCION* := *evalm*(*evalm*(*MatExp* &* *Xcero*) + *map*(*int*, *evalm*(*map*(*rcurry*(*eval*, *t* ='*t* − tau'), *MatExp*) &* *map*(*rcurry*(*eval*, *t* ='tau'), *BB*)), tau = 0 ..*t*)) : Sol_1 := *xx*(*t*) = $SOLUCION_1$; Sol_2 := *yy*(*t*) = $SOLUCION_2$; Sol_3 := *zz*(*t*) = $SOLUCION_3$;

$$Sol_1 := xx(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{3}e^{3t}t+\frac{13}{18}e^{3t}+\frac{23}{18}$$

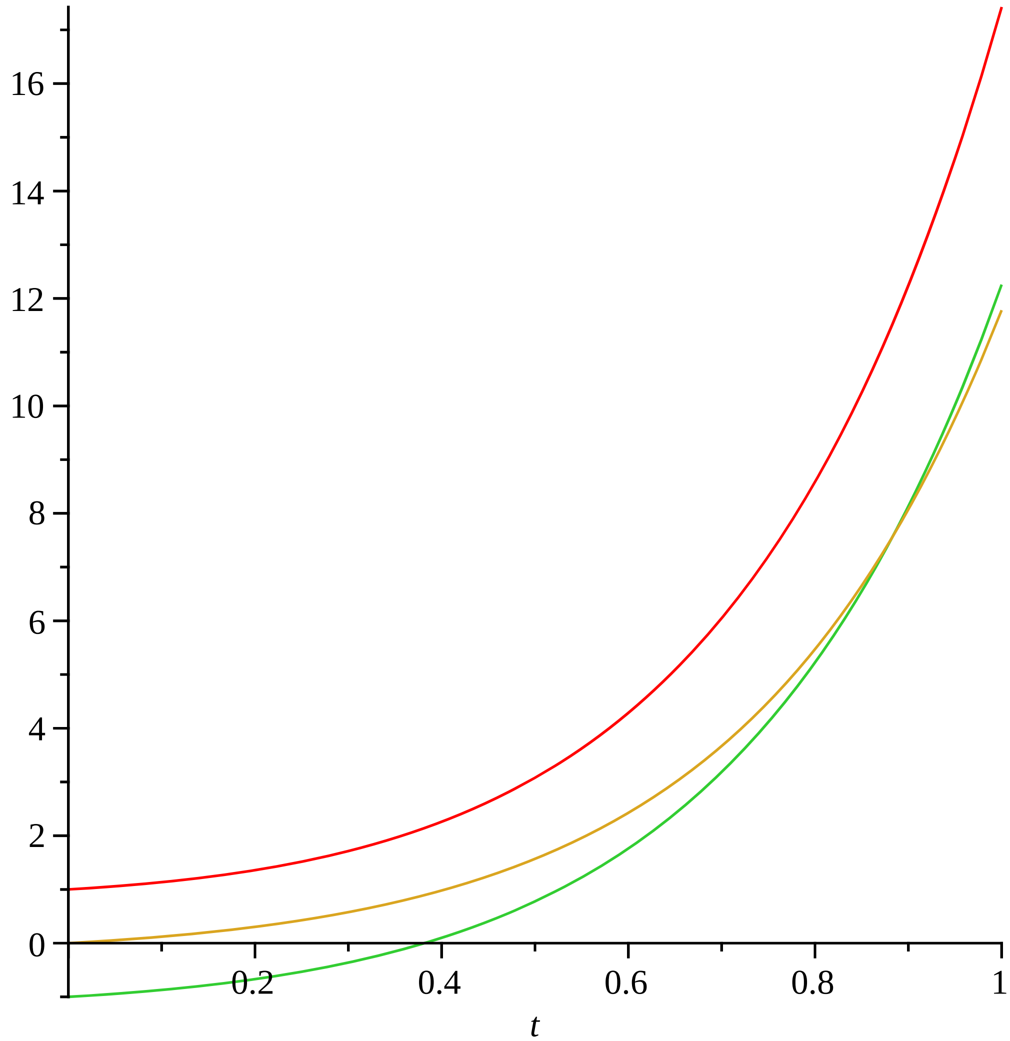
$$Sol_2 := yy(t) = -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{3}e^{3t}t+\frac{7}{18}e^{3t}-\frac{8}{9}$$

$$Sol_3 := zz(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}t+\frac{7}{18}e^{3t}-\frac{7}{18}+\frac{1}{2}e^{t} \quad (43)$$

>

RESPUESTA 5b)

> *plot*([*rhs*($Solucion_1$), *rhs*($Solucion_2$), *rhs*($Solucion_3$)], *t* = 0 ..1)



>

FIN RESPUESTA 5)

>

FIN EXAMEN

>

>