

>
SOLUCION

FACULTAD DE INGENIERÍA
ECUACIONES DIFERENCIALES
TERCER EXAMEN PARCIAL

2012 MAYO 23

> restart

1) UTILIZANDO EXCLUSIVAMENTE **TRANSFORMADA DE LAPLACE** (sin usar dsolve):

a) (15/100 puntos) OBTENER LA **SOLUCIÓN PARTICULAR** DE LA ECUACIÓN DADA CON LAS CONDICIONES INICIALES DADAS

b) (15/100 puntos) GRAFICAR - JUNTAS - LA SOLUCIÓN OBTENIDA EN EL INCISO a) Y SU PRIMERA DERIVADA PARA UN INTERVALO DE $0 < t < 15$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 9 y(t) = 24 \text{Heaviside}(t - 3) \cos(2 t - 6)$$

$$y(0) = 0$$

$$D(y)(0) = 1$$

(1)

>

RESPUESTA 1a)

> Ecuacion := $\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 9 y(t) = 24 \text{Heaviside}(t - 3) \cos(2 t - 6)$

$$\text{Ecuacion} := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 6 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 9 y(t) = 24 \text{Heaviside}(t - 3) \cos(2 t - 6) \quad (2)$$

> Condiciones := $y(0) = 0, D(y)(0) = 1$

$$\text{Condiciones} := y(0) = 0, D(y)(0) = 1 \quad (3)$$

> with(intrans) :

> TransLapEcuacion := subs(Condiciones, laplace(Ecuacion, t, s))

$$\begin{aligned} \text{TransLapEcuacion} &:= s^2 \text{laplace}(y(t), t, s) - 1 + 6 s \text{laplace}(y(t), t, s) + 9 \text{laplace}(y(t), t, s) \\ &= \frac{24 e^{-3s} s}{s^2 + 4} \end{aligned} \quad (4)$$

> TransLapSolucion := isolate(TransLapEcuacion, laplace(y(t), t, s))

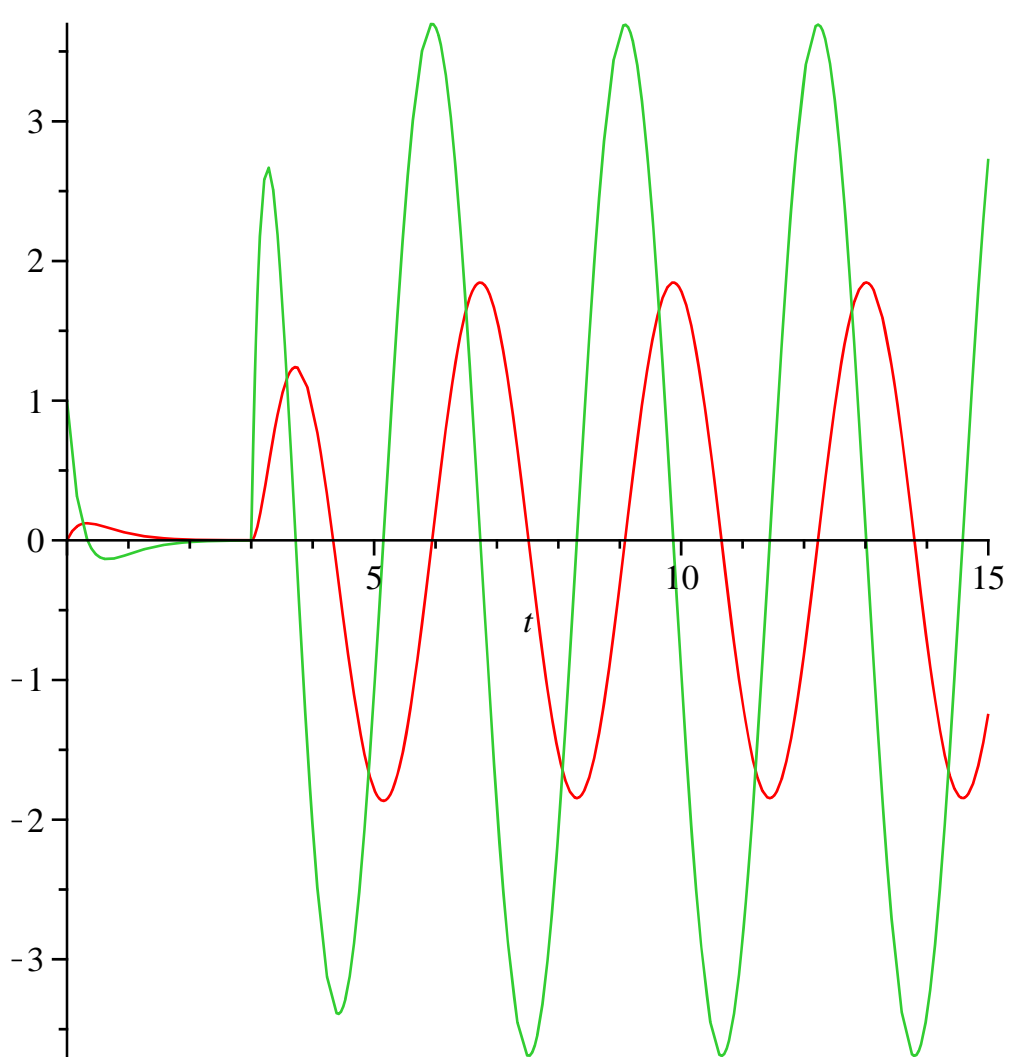
$$\text{TransLapSolucion} := \text{laplace}(y(t), t, s) = \frac{\frac{24 e^{-3s} s}{s^2 + 4} + 1}{s^2 + 6 s + 9} \quad (5)$$

> SolucionParticular := simplify(invlaplace(TransLapSolucion, s, t))

$$\begin{aligned} \text{SolucionParticular} := y(t) &= t e^{-3t} + \frac{288}{169} \text{Heaviside}(t - 3) \sin(2 t - 6) + \frac{120}{169} \text{Heaviside}(t \\ &- 3) \cos(2 t - 6) + \frac{2688}{169} \text{Heaviside}(t - 3) e^{-3t+9} - \frac{72}{13} \text{Heaviside}(t - 3) e^{-3t+9} t \end{aligned} \quad (6)$$

RESPUESTA 1b)

> plot([rhs(SolucionParticular), rhs(diff(SolucionParticular, t))], t=0..15)



>

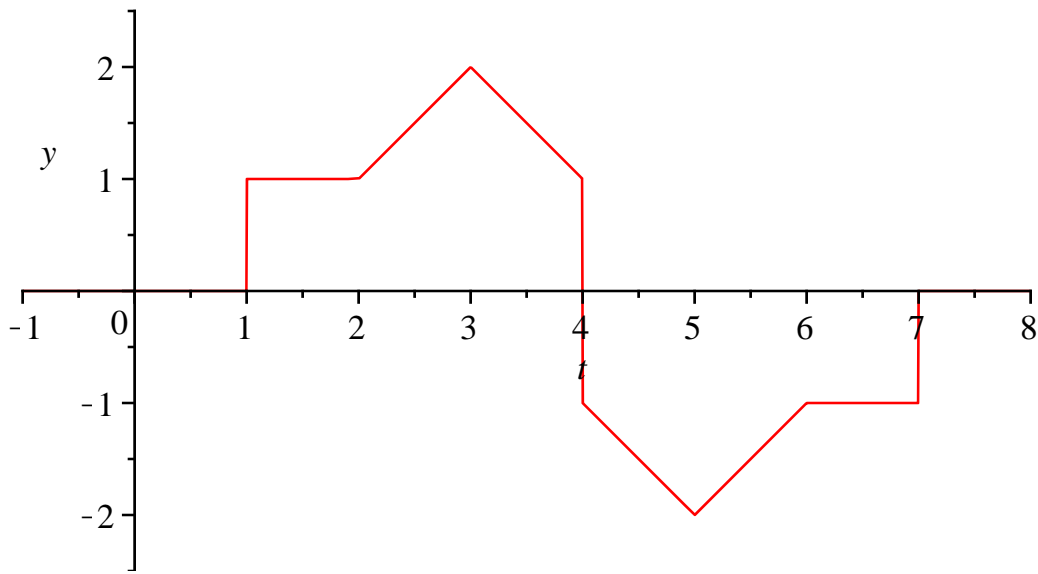
FIN RESPUESTA 1)

> restart

2) DE LA FUNCIÓN DIBUJADA:

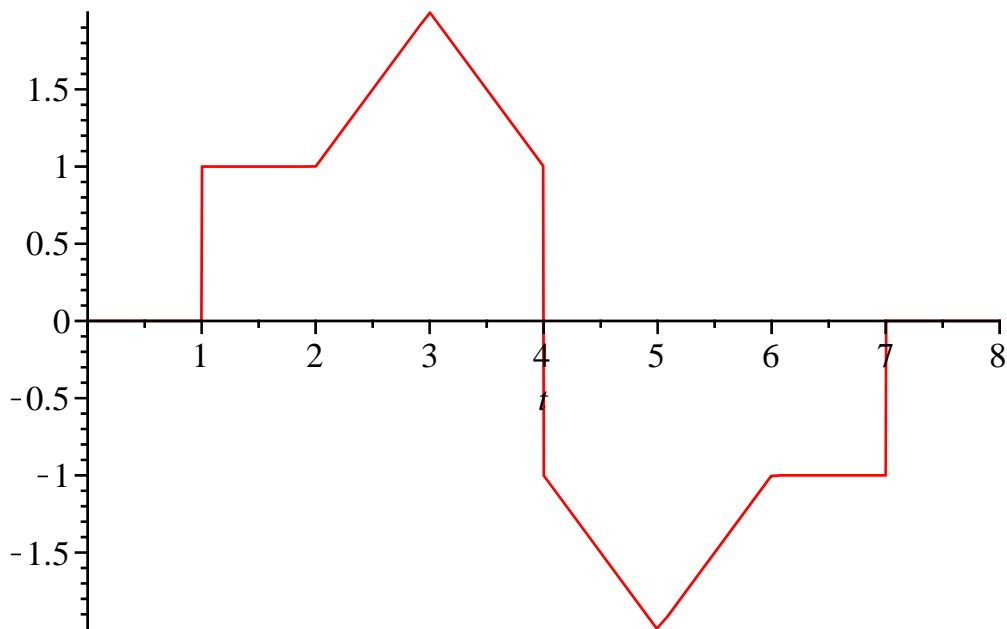
a) (15/100 puntos) OBTENER SU TRANSFORMADA DE LAPLACE

b) (25/100 puntos) GRAFICAR- JUNTAS - EN EL INTERVALO $2.8 < x < 3.2$ A: LA FUNCIÓN Y SU SERIE SEÑO OBTENIDA CALCULANDO SUS PRIMEROS 500 TÉRMINOS



>
RESPUESTA 2a)

> $f(t) := \text{Heaviside}(t-1) + (t-2) \cdot \text{Heaviside}(t-2) - 2 \cdot (t-3) \cdot \text{Heaviside}(t-3) + (t-4) \cdot \text{Heaviside}(t-4) - 2 \cdot \text{Heaviside}(t-4) - (t-4) \cdot \text{Heaviside}(t-4) + 2 \cdot (t-5) \cdot \text{Heaviside}(t-5) - (t-6) \cdot \text{Heaviside}(t-6) + \text{Heaviside}(t-7) ; \text{plot}(f(t), t=0..8)$



> with(inttrans) :

> TransLapFuncion := laplace(f(t), t, s)

$$\text{TransLapFuncion} := \frac{e^{-2s} - e^{-6s} + 2e^{-5s} - 2e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-s} + e^{-7s} - 2e^{-4s}}{s} \quad (7)$$

>
RESPUESTA 2b)

> L := 4

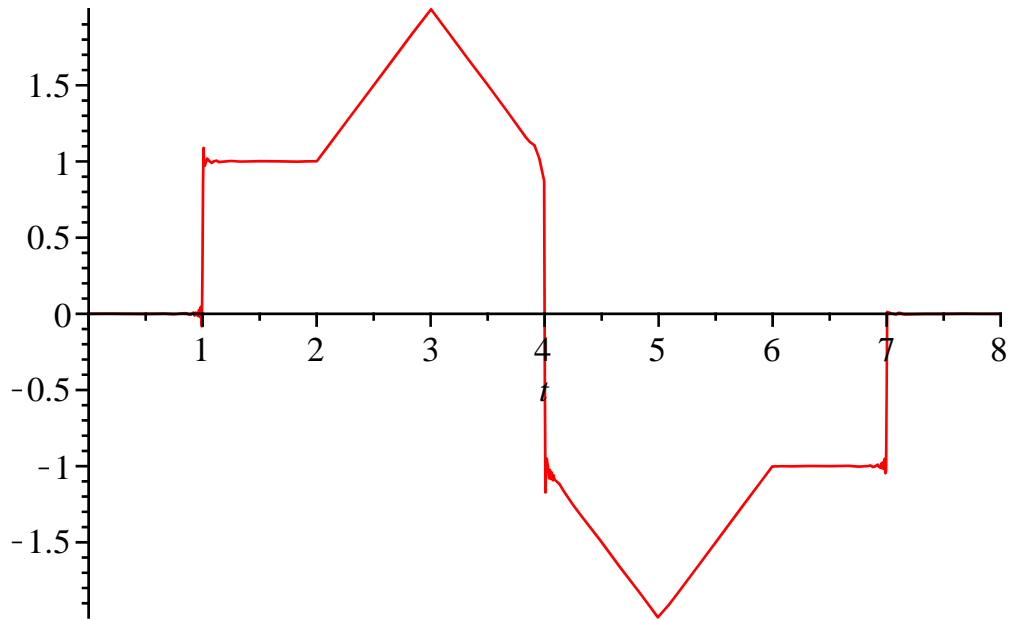
$$L := 4$$

(8)

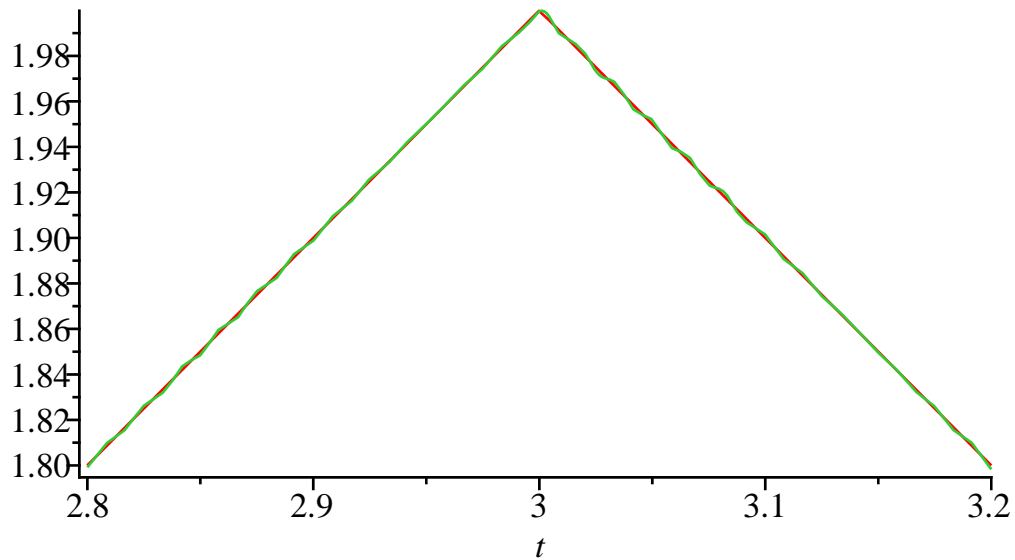
```
> b_n := (1/L) * int(f(t) * sin(n*Pi*t/L), t=0..8) :
```

```
> STF_500 := sum(b_n * sin(n*Pi*t/L), n=1..500) :
```

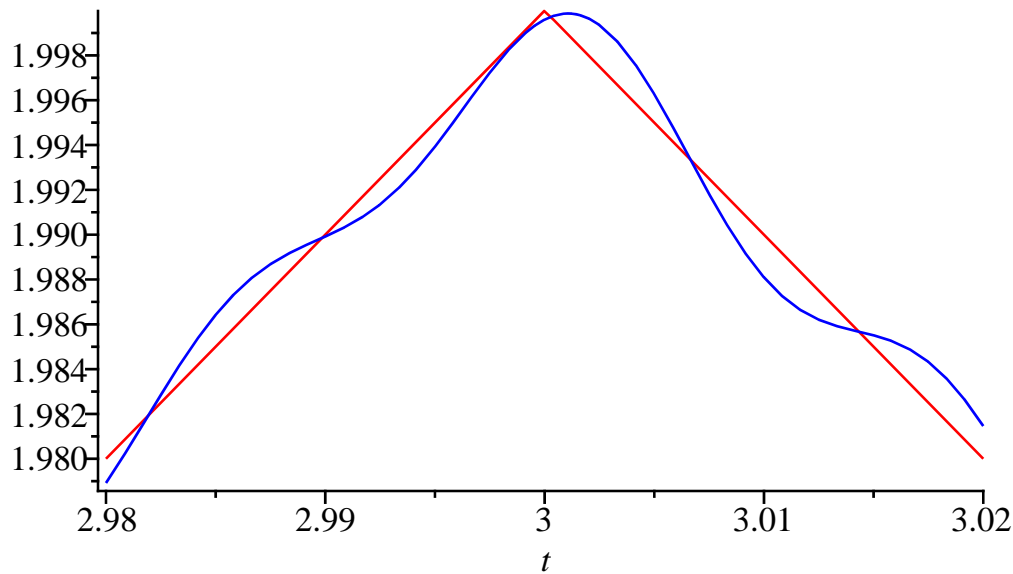
```
> plot(STF_500, t=0..8)
```



```
> plot([f(t), STF_500], t=2.8..3.2)
```



```
> plot([f(t), STF_500], t=2.98..3.02, color=[red, blue])
```



> FIN RESPUESTA 2)

> restart

3) (30/100 puntos) OBTENER LA SOLUCIÓN DE LA SIGUIENTE ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES, UTILIZANDO EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES CON UNA CONSTANTE DE SEPARACIÓN NEGATIVA

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, y) - 8 \left(\frac{\partial}{\partial y} z(x, y) \right) = z(x, y) \quad (9)$$

> RESPUESTA 3)

> Ecuacion := $\frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, y) - 8 \left(\frac{\partial}{\partial y} z(x, y) \right) = z(x, y)$

$$\text{Ecuacion} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, y) - 8 \left(\frac{\partial}{\partial y} z(x, y) \right) = z(x, y) \quad (10)$$

> EcuSeparable := eval(subs(z(x, y) = F(x) · G(y), Ecuacion))

$$\text{EcuSeparable} := \left(\frac{d^2}{dx^2} F(x) \right) G(y) - 8 F(x) \left(\frac{d}{dy} G(y) \right) = F(x) G(y) \quad (11)$$

> EcuSeparada := simplify $\left(\frac{\left(\text{lhs}(\text{EcuSeparable}) + 8 F(x) \left(\frac{d}{dy} G(y) \right) \right)}{F(x) \cdot G(y)} \right)$

$$= \frac{\left(\text{rhs}(\text{EcuSeparable}) + 8 F(x) \left(\frac{d}{dy} G(y) \right) \right)}{F(x) \cdot G(y)}$$

$$\text{EcuSeparada} := \frac{\frac{d^2}{dx^2} F(x)}{F(x)} = \frac{G(y) + 8 \left(\frac{d}{dy} G(y) \right)}{G(y)} \quad (12)$$

> EcuacionX := lhs(EcuSeparada) = alpha; EcuacionY := rhs(EcuSeparada) = alpha

$$EcuacionX := \frac{\frac{d^2}{dx^2} F(x)}{F(x)} = \alpha$$

$$EcuacionY := \frac{G(y) + 8 \left(\frac{d}{dy} G(y) \right)}{G(y)} = \alpha \quad (13)$$

> *SolucionXneg* := dsolve(subs(alpha=-beta·2, EcuacionX)); *SolucionYneg*
:= dsolve(subs(alpha=-beta·2, EcuacionY))

$$SolucionXneg := F(x) = _C1 \sin(\beta x) + _C2 \cos(\beta x)$$

$$SolucionYneg := G(y) = _C1 e^{-\frac{1}{8}(\beta^2 + 1)y} \quad (14)$$

> *SolucionFinalNegativa* := z(x, y) = rhs(*SolucionXneg*)·subs(_C1 = 1, rhs(*SolucionYneg*))

$$SolucionFinalNegativa := z(x, y) = (_C1 \sin(\beta x) + _C2 \cos(\beta x)) e^{-\frac{1}{8}(\beta^2 + 1)y} \quad (15)$$

>

FIN RESPUESTA 3)

>

FIN EXAMEN