>

SOLUCION

ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN FINAL
SEMESTRE 2012-2

31 MAYO 2012

> *restart*

1) Determine la solución en forma explícita de la siguiente ecuación diferencial

> $Ecuacion := x\cdot y(x)\cdot\cdot 2\cdot diff(y(x),x) - y(x)\cdot\cdot 3 - 1 = 0$

$$Ecuacion := x\,y(x)^2 \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - y(x)^3 - 1 = 0 \qquad (1)$$

RESPUESTA 1)

> $with(DEtools):$

> $odeadvisor(Ecuacion)$

$$[\_separable] \qquad (2)$$

> $M(x,y) := -y^3 - 1;\ N(x,y) := x\,y^2;$

$$M(x,y) := -y^3 - 1$$

$$N(x,y) := x\,y^2 \qquad (3)$$

> $P(x) := -1;\ Q(y) := y\cdot\cdot 3 + 1;\ R(x) := x;\ S(y) := y\cdot\cdot 2$

$$P(x) := -1$$

$$Q(y) := y^3 + 1$$

$$R(x) := x$$

$$S(y) := y^2 \qquad (4)$$

> $Solucion := int\left(\frac{P(x)}{R(x)}, x\right) + int\left(\frac{S(y)}{Q(y)}, y\right) = C1$

$$Solucion := -\ln(x) + \frac{1}{3}\ln\left(y^3 + 1\right) = C1 \qquad (5)$$

> $SolucionGeneral := simplify(\exp(lhs(Solucion))\cdot x)\cdot\cdot 3 = (C1\cdot x)\cdot\cdot 3$

$$SolucionGeneral := (y+1)\left(y^2 - y + 1\right) = C1^3\,x^3 \qquad (6)$$

FIN RESPUESTA 1)

> *restart*

2) Resuelva la ecuación diferencial

> $Ecuacion := diff(y(x), x\$2) + diff(y(x), x) - 2\cdot y(x) = 10\cdot\sin(3\,x)$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + \frac{d}{dx}\,y(x) - 2\,y(x) = 10\sin(3\,x) \qquad (7)$$

RESPUESTA 2)

> $EcuacionHomogenea := lhs(Ecuacion) = 0;\ Q(x) := rhs(Ecuacion);$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + \frac{d}{dx}\,y(x) - 2\,y(x) = 0$$

$$Q(x) := 10\sin(3\,x) \qquad (8)$$

> $EcuacionCaracteristica := m\cdot\cdot 2 + m - 2 = 0$

$$EcuacionCaracteristica := m^2 + m - 2 = 0 \qquad (9)$$

> $Raiz := solve(EcuacionCaracteristica)$

$$Raiz := 1, -2 \tag{10}$$

> $Solucion_1 := y(x) = \exp(Raiz_1 \cdot x); Solucion_2 := y(x) = \exp(Raiz_2 \cdot x)$

$$Solucion_1 := y(x) = e^{x}$$

$$Solucion_2 := y(x) = e^{-2x} \tag{11}$$

> $SolucionHomogenea := y(x) = C1 \cdot rhs(Solucion_1) + C2 \cdot rhs(Solucion_2)$

$$SolucionHomogenea := y(x) = C1\, e^{x} + C2\, e^{-2x} \tag{12}$$

> $with(linalg):$

> $AA := array([[rhs(Solucion_1), rhs(Solucion_2)], [rhs(diff(Solucion_1, x)), rhs(diff(Solucion_2, x))]])$

$$AA := \begin{bmatrix} e^{x} & e^{-2x} \\ e^{x} & -2\, e^{-2x} \end{bmatrix} \tag{13}$$

> $BB := array([0, Q(x)])$

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & 10 \sin(3x) \end{bmatrix} \tag{14}$$

> $SOL := linsolve(AA, BB)$

$$SOL := \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \frac{\sin(3x)}{e^{x}} & -\frac{10}{3} \frac{\sin(3x)}{e^{-2x}} \end{bmatrix} \tag{15}$$

> $Aprima := SOL_1; Bprima := SOL_2;$

$$Aprima := \frac{10}{3} \frac{\sin(3x)}{e^{x}}$$

$$Bprima := -\frac{10}{3} \frac{\sin(3x)}{e^{-2x}} \tag{16}$$

> $A(x) := int(Aprima, x) + C1; B(x) := int(Bprima, x) + C2;$

$$A(x) := -e^{-x} \cos(3x) - \frac{1}{3} e^{-x} \sin(3x) + C1$$

$$B(x) := \frac{10}{13} e^{2x} \cos(3x) - \frac{20}{39} e^{2x} \sin(3x) + C2 \tag{17}$$

> $SolucionNoHomogenea := y(x) = simplify(A(x) \cdot rhs(Solucion_1) + B(x) \cdot rhs(Solucion_2))$

$$SolucionNoHomogenea := y(x) = -\frac{3}{13} \cos(3x) - \frac{11}{13} \sin(3x) + C1\, e^{x} + C2\, e^{-2x} \tag{18}$$

FIN RESPUESTA 2)

> $restart$

3) Resuelva, por el método de variación de parámetros, la ecuación diferencial

> $Ecuacion := diff(y(x), x\$2) - 16\, y(x) = \frac{16\, x}{\exp(4\, x)}$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - 16\, y(x) = \frac{16\, x}{e^{4x}} \tag{19}$$

> $EcuacionHomogenea := lhs(Ecuacion) = 0; Q(x) := rhs(Ecuacion)$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 16\, y(x) = 0$$

$$Q(x) := \frac{16\, x}{e^{4\, x}} \quad \textbf{(20)}$$

> $EcuacionCaracteristica := m \cdot \cdot 2 - 16 = 0$

$$EcuacionCaracteristica := m^2 - 16 = 0 \quad \textbf{(21)}$$

> $Raiz := solve(EcuacionCaracteristica)$

$$Raiz := 4,\ -4 \quad \textbf{(22)}$$

> $Solucion_1 := y(x) = \exp(Raiz_1 \cdot x);\ Solucion_2 := y(x) = \exp(Raiz_2 \cdot x)$

$$Solucion_1 := y(x) = e^{4\, x}$$

$$Solucion_2 := y(x) = e^{-4\, x} \quad \textbf{(23)}$$

> $SolucionHomogenea := y(x) = C1 \cdot rhs(Solucion_1) + C2 \cdot rhs(Solucion_2)$

$$SolucionHomogenea := y(x) = C1\, e^{4\, x} + C2\, e^{-4\, x} \quad \textbf{(24)}$$

> $with(linalg):$

> $AA := wronskian([rhs(Solucion_1), rhs(Solucion_2)], x)$

$$AA := \begin{bmatrix} e^{4\, x} & e^{-4\, x} \\ 4\, e^{4\, x} & -4\, e^{-4\, x} \end{bmatrix} \quad \textbf{(25)}$$

> $BB := array([0, Q(x)])$

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & \frac{16\, x}{e^{4\, x}} \end{bmatrix} \quad \textbf{(26)}$$

> $SOL := linsolve(AA, BB)$

$$SOL := \begin{bmatrix} \frac{2\, x}{(e^{4\, x})^2} & -\frac{2\, x}{e^{-4\, x}\, e^{4\, x}} \end{bmatrix} \quad \textbf{(27)}$$

> $Aprima := SOL_1;\ Bprima := SOL_2$

$$Aprima := \frac{2\, x}{(e^{4\, x})^2}$$

$$Bprima := -\frac{2\, x}{e^{-4\, x}\, e^{4\, x}} \quad \textbf{(28)}$$

> $A(x) := int(Aprima, x) + C1;\ B(x) := int(Bprima, x) + C2$

$$A(x) := -\frac{1}{32}\, \frac{1 + 8\, x}{(e^{4\, x})^2} + C1$$

$$B(x) := -\frac{x^2}{e^{-4\, x}\, e^{4\, x}} + C2 \quad \textbf{(29)}$$

> $SolucionNoHomogenea := y(x) = simplify(A(x) \cdot rhs(Solucion_1) + B(x) \cdot rhs(Solucion_2))$

$$SolucionNoHomogenea := y(x) = -\frac{1}{32}\, e^{-4\, x} - \frac{1}{4}\, e^{-4\, x}\, x + C1\, e^{4\, x} - e^{-4\, x}\, x^2 + C2\, e^{-4\, x} \quad \textbf{(30)}$$

FIN RESPUESTA 3)

> *restart*

4) Determine en la ecuación diferencial, su sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden y resuélvalo

> $Ecuacion := diff(y(t), t\$2) + 4\, diff(y(t), t) + 4\, y(t) = 8$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 4\, y(t) = 8 \quad \textbf{(31)}$$

RESPUESTA 4)

> $Sistema := diff\left(y_1(t), t\right) = y_2(t), diff\left(y_2(t), t\right) = -4\, y_1(t) - 4\, y_2(t) + 8 : Sistema_1; Sistema_2;$

$$\frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} y_2(t) = -4\, y_1(t) - 4\, y_2(t) + 8 \quad \textbf{(32)}$$

> $Solucion := simplify(dsolve(\{Sistema\})) : Solucion_1; Solucion_2;$

$$y_1(t) = e^{-2t}\, \_C2 + e^{-2t}\, t\, \_C1 + 2$$

$$y_2(t) = -e^{-2t} (2\, \_C2 + 2\, t\, \_C1 - \_C1) \quad \textbf{(33)}$$

FIN RESPUESTA 4)

> *restart*

5) Resuelva el problema del valor inicial

> $Ecuacion := diff(x(t), t\$2) - diff(x(t), t) - 6\, x(t) = 60\ \mathrm{Heaviside}(t - \mathrm{Pi});$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} x(t) - \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) - 6\, x(t) = 60\ \mathrm{Heaviside}(t - \pi) \quad \textbf{(34)}$$

> $Condiciones := x(0) = 0, \mathrm{D}(x)(0) = 0;$

$$Condiciones := x(0) = 0, \mathrm{D}(x)(0) = 0 \quad \textbf{(35)}$$

RESPUESTA 5)

> $with(inttrans) :$

> $TransLapEcuacion := subs(Condiciones, laplace(Ecuacion, t, s))$

$$TransLapEcuacion := s^2\, laplace(x(t), t, s) - s\, laplace(x(t), t, s) - 6\, laplace(x(t), t, s) = \frac{60\, e^{-s\pi}}{s} \quad \textbf{(36)}$$

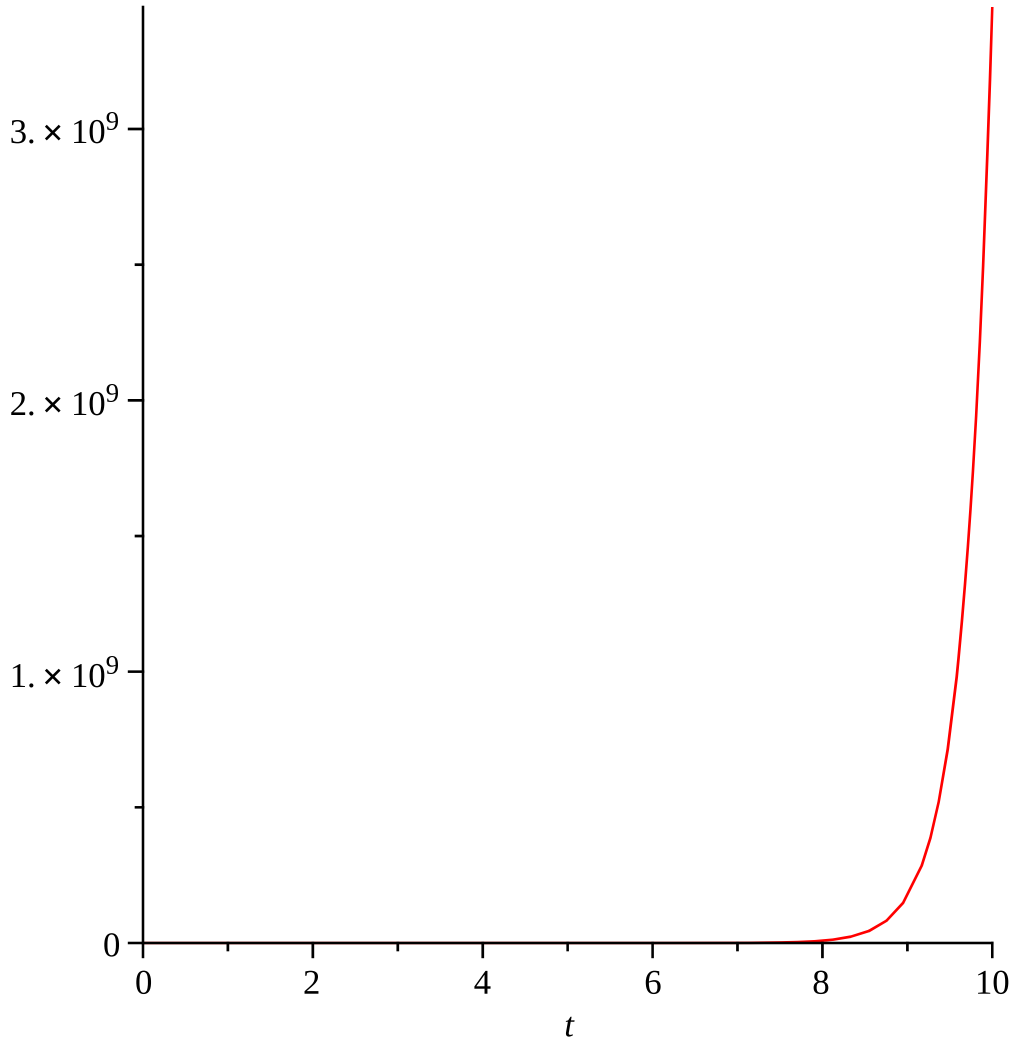
> $TransLapSolucion := isolate(TransLapEcuacion, laplace(x(t), t, s))$

$$TransLapSolucion := laplace(x(t), t, s) = \frac{60\, e^{-s\pi}}{s\,(s^2 - s - 6)} \quad \textbf{(37)}$$

> $SolucionParticular := invlaplace(TransLapSolucion, s, t)$

$$SolucionParticular := x(t) = 2\ \mathrm{Heaviside}(t - \pi) \left(-5 + 3\, e^{-2t + 2\pi} + 2\, e^{3t - 3\pi} \right) \quad \textbf{(38)}$$

> $plot(rhs(SolucionParticular), t = 0..10)$



FIN RESPUESTA 5)

> *restart*

6) Resuelva la ecuación integro-diferencial

> $Ecuacion := diff(y(t), t) = -\sin(t) - int(y(\mathrm{tau}), \mathrm{tau} = 0..t)$

$$Ecuacion := \frac{d}{dt}\, y(t) = -\sin(t) - \left(\int_0^t y(\tau)\, d\tau\right) \tag{39}$$

> $Condicion := y(0) = 1$

$$Condicion := y(0) = 1 \tag{40}$$

RESPUESTA 6)

> $with(inttrans):$

> $TransLapEcuacion := subs(Condicion, laplace(Ecuacion, t, s))$

$$TransLapEcuacion := s\, laplace(y(t), t, s) - 1 = -\frac{1}{s^2+1} - \frac{laplace(y(t), t, s)}{s} \tag{41}$$

> $TransLapSolucion := simplify(isolate(TransLapEcuacion, laplace(y(t), t, s)))$

$$TransLapSolucion := laplace(y(t), t, s) = \frac{s^3}{(s^2+1)^2} \tag{42}$$

> $SolucionParticular := invlaplace(TransLapSolucion, s, t)$

$$SolucionParticular := y(t) = -\frac{1}{2}\, t \sin(t) + \cos(t) \qquad \textbf{(43)}$$

FIN RESPUESTA 6)

> *restart*

7) Resuelva la ecuación diferencial en derivadas parciales suponiendo una constante de separación igual a 3

> $Ecuacion := diff(u(x, y), x\$2) - 3\, diff(u(x, y), y) = 0$

$$Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) - 3\left(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y)\right) = 0 \qquad \textbf{(44)}$$

RESPUESTA 7)
ALTERNATIVA a)

> $EcuacionSeparable := simplify(eval(subs(u(x, y) = F(x) \cdot G(y), Ecuacion)))$

$$EcuacionSeparable := \left(\frac{d^2}{dx^2} F(x)\right) G(y) - 3\, F(x) \left(\frac{d}{dy} G(y)\right) = 0 \qquad \textbf{(45)}$$

> $EcuacionSeparada := \dfrac{\left(lhs(EcuacionSeparable) + 3\, F(x)\left(\frac{d}{dy} G(y)\right)\right)}{3 \cdot F(x) \cdot G(y)} = \dfrac{\left(rhs(EcuacionSeparable) + 3\, F(x)\left(\frac{d}{dy} G(y)\right)\right)}{3 \cdot F(x) \cdot G(y)}$

$$EcuacionSeparada := \frac{1}{3}\, \frac{\frac{d^2}{dx^2} F(x)}{F(x)} = \frac{\frac{d}{dy} G(y)}{G(y)} \qquad \textbf{(46)}$$

> $EcuacionEnX := lhs(EcuacionSeparada) = \mathrm{alpha};\ EcuacionEnY := rhs(EcuacionSeparada) = \mathrm{alpha}$

$$EcuacionEnX := \frac{1}{3}\, \frac{\frac{d^2}{dx^2} F(x)}{F(x)} = \alpha$$

$$EcuacionEnY := \frac{\frac{d}{dy} G(y)}{G(y)} = \alpha \qquad \textbf{(47)}$$

> $SolucionEnX := dsolve(subs(\mathrm{alpha} = 3, EcuacionEnX))$

$$SolucionEnX := F(x) = \_C1\, e^{-3x} + \_C2\, e^{3x} \qquad \textbf{(48)}$$

> $SolucionEnY := dsolve(subs(\mathrm{alpha} = 3, EcuacionEnY))$

$$SolucionEnY := G(y) = \_C1\, e^{3y} \qquad \textbf{(49)}$$

_C

> $SolucionGeneral := u(x, y) = simplify(rhs(SolucionEnX) \cdot rhs(subs(\_C1 = 1, SolucionEnY)))$

$$SolucionGeneral := u(x, y) = \left(\_C1\, e^{-3x} + \_C2\, e^{3x}\right) e^{3y} \qquad \textbf{(50)}$$

ALTERNATIVA b)

> $EcuacionSeparadaB := \dfrac{\left(lhs(EcuacionSeparable) + 3\, F(x)\left(\frac{d}{dy} G(y)\right)\right)}{F(x) \cdot G(y)}$

$$= \frac{\left(rhs(EcuacionSeparable) + 3\,F(x)\left(\frac{d}{dy}\,G(y)\right)\right)}{F(x)\cdot G(y)}$$

$$EcuacionSeparadaB := \frac{\frac{d^2}{dx^2}\,F(x)}{F(x)} = \frac{3\left(\frac{d}{dy}\,G(y)\right)}{G(y)} \tag{51}$$

> $EcuacionBenX := lhs(EcuacionSeparadaB) = \text{alpha};\ EcuacionBenY := rhs(EcuacionSeparadaB) = \text{alpha}$

$$EcuacionBenX := \frac{\frac{d^2}{dx^2}\,F(x)}{F(x)} = \alpha$$

$$EcuacionBenY := \frac{3\left(\frac{d}{dy}\,G(y)\right)}{G(y)} = \alpha \tag{52}$$

> $SolucionBenX := dsolve(subs(\text{alpha} = 3, EcuacionBenX));\ SolucionBenY := dsolve(subs(\text{alpha} = 3, EcuacionBenY))$

$$SolucionBenX := F(x) = \_C1\,e^{\sqrt{3}\,x} + \_C2\,e^{-\sqrt{3}\,x}$$

$$SolucionBenY := G(y) = \_C1\,e^{y} \tag{53}$$

> $SolucionGeneralB := u(x, y) = simplify(rhs(SolucionBenX)\cdot rhs(subs(\_C1 = 1, SolucionBenY)))$

$$SolucionGeneralB := u(x, y) = \left(\_C1\,e^{\sqrt{3}\,x} + \_C2\,e^{-\sqrt{3}\,x}\right) e^{y} \tag{54}$$

FIN RESPUESTA 7)

> *restart*

FIN EXAMEN

>